جامعة عين شمس

كلية التجارة

أسس الرياضة البحتة

د. وائل سعد الدواخلى

مراجعة

د. ممدوح عبد العليم

مقدمـــــة

بحمد الله وتوفيقه تم إعداد هذا الكتاب ووضع منهاجه الدراسى فى الرياضة البحتة على أساس عرض بعض الأساليب الرياضية. فالرياضيات بفروعها المختلفة تعتبر العمود الفقرى لمعظم العلوم الأخرى. ولذلك يشتمل هذا الكتاب على بعض الأساسيات مثل التباديل والتوافيق والمعادلات الرياضية والفئات والمتباينات والبرمجة الخطية وكذلك المحددات والمصفوفات والتفاضل والتكامل.

ويهدف هذا الكتاب إلى تقديم أهم الأسس فى مادة الرياضة البحتة التى تفيد ليس فقط الطلبة الذين يدرسون فى كليات التجارة فحسب، بل لكل الدارسين فى مجال العلوم التجارية والذين يبحثون فى مجال التطبيقات العلمية.

وقد تم مراعاة البساطة والوضوح فى عرض المادة العلمية مع تزويد الطلاب ببعض التدريبات المحلولة تيسيراً لهم. أى استهدف المؤلف استخدام الأسلوب المبسط فى عرض الموضوعات بعيداً عن أى تعقيدات وكذلك شمول الموضوعات بما يخدم الهدف.

ومن الأهداف العامة للمقرر تزويد الطالب بالمفاهيم والأسس الرياضية والمفاهيم الكمية المطلوبة وتنمية مهارات الطالب فى استخدام الأساليب والأدوات المختلفة للمفاضلة بين البدائل واتخاذ القرارات وتنمية المهارات الفنية وتنمية قدرة الطالب التحليلية والاستنتاجية والتفكير الابتكارى عن طريق التعرض للأساليب المختلفة لحل المشكلات وتعريف الطالب بالمعارف فى المجال الرياضى.

ومن المخرجات التعليمية المستهدفة من تدريس المقرر:

(١) مهارات معرفية وإدراكية: وهى الإلمام بالأسس والمبادئ الأساسية لعلم الرياضيات والتعرف على طبيعة الأسلوب الكمى وفهم أهمية مراحل علم الرياضة البحتة وتحديد معايير الاختيار والتعرف على النماذج والأدوات المستخدمة فى مجال هذا العلم وعلى مبادئه وأسسه.

(٢) مهارات فكرية (ذهنية): وتلخص فى تنمية مهارات التحليل والاستنتاج لمساندة عملية اتخاذ القرارات وتنمية مهارات التعامل مع البيانات والمعلومات وفهم الإبداع والابتكار وصقل مهارة التفكير لتطبيق النظريات على الواقع العلمى.

(٣) مهارات مهنية وتطبيقية: ومنها تنمية مهارة تطبيق النماذج والأساليب الكمية فى الحياة العملية وزيادة القدرة على الاستفادة وتطبيق المفاهيم والاستراتيجيات وتنمية مهارات التنبؤ والتخطيط فى المنظمات.

(٤) مهارات عامة وتحويلية: وهى تنمية مهارات الاتصال والقدرة على التحليل وطرح الاستفسارات وفهم طبيعة وديناميكية العمل وكيفية تحقيق التوقعات وزيادة القدرة على التفاعل وتنمية المهارات.

وأرجو الله أن يحقق هذا الكتاب الأهداف المرجوة منه وهو الموفق والمستعان.

المؤلف

الفهـــــرس

الباب الأول
التبـــــاديل والتوافـــيق

كثيرا ما نهتم في مجال الدراسات الاجتماعية والاقتصادية بعملية تكوين مجموعة من الأشياء في شكل معين دون الاهتمام بترتيبها المنظم أو الاهتمـام بهذا الترتيب المنظم ويكون ذلك في توزيع الجوائز أو تكوين لجـان معينـة أو شغل المناصب بطرق مختلفة إلى غير ذلك، و تهتم فكرة التباديل والتوافيـق بإعطاء عدد الطرق الممكنة لذلك من خلال بعض القواعد الرياضية التي تسهل هذا التكوين.

أولاً : القوانين الأساسية للتباديل

افترض انه لدينا ثلاثة طائرات في أحد الاحتفالات الدولية و لقد خـصص ثلاث جوائز توزع عليها بعد العرض، و علي فرض أن هذه الجـوائز مرتبـة حسب قيمتها (جائزة أولي، جائزة ثانية، جائزة ثالثة)

كما أنه لا يجوز الفوز بأكثر من جائزة واحدة، وبالتالي يمكن استعراض طرق توزيع الجوائز علي النحو التالي :

الطريقة الأولى: تفوز الطائرة الأولى بالجائزة الأولى، تفوز الطائرة الثانيـة بالجائزة الثانية، وتفوز الطائرة الثالثة بالجائزة الثالثة.

الطريقة الثانية: تفوز الطائرة الأولى بالجائزة الأولى، تفوز الطائرة الثانيـة بالجائزة الثالثة، وتفوز الطائرة الثالثة بالجائزة الثانية.

الطريقة الثالثة: تفوز الطائرة الأولى بالجائزة الثانية، تفوز الطائرة الثانية بالجائزة الأولى، و تفوز الطائرة الثالثة بالجائزة الثالثة.

الطريقة الرابعة: تفوز الطائرة الأولى بالجائزة الثانية، تفوز الطائرة الثانية بالجائزة الثالثة، وتفوز الطائرة الثالثة بالجائزة الأولى.

الطريقة الخامسة: تفوز الطائرة الأولى بالجائزة الثالثة، تفوز الطائرة الثانية بالجائزة الأولى، وتفوز الطائرة الثالثة بالجائزة الثانية.

الطريقة السادسة: تفوز الطائرة الأولى بالجائزة الثالثة، تفوز الطائرة الثانية بالجائزة الثانية، وتفوز الطائرة الثالثة بالجائزة الأولى.

وهكذا نجد أنه يمكن وضع ستة ترتيبات لتوزيع الجوائز الثلاث، حيث إذا افترضنا أن الطائرة الأولى تفوز بالجائزة الأولى فإنه يترتب علي ذلك وجود طريقتين، وإذا افترضنا أن الطائرة الأولى تفوز بالجائزة الثانية فإنه يترتب علي ذلك وجود طريقتين، كما أنه إذا افترضنا أن الطائرة الأولى تفوز بالجائزة الثالثة فإنه يترتب علي ذلك وجود طريقتين، وعلي ذلك يكون عدد الطرق الكلي ستة طرق.

كما إننا نحصل علي نفس النتيجة لعدد الطرق لو افترضنا أن الطائرة الثانية هي التي تفوز بالجائزة الأولى وأيضاً إذا ما افترضنا أن الطائرة الثالثة هي التي تفوز بالجائزة الأولى.

وهنا يمكن القول بأن الجائزة الأولى يمكن أن تمنح بثلاث طرق، والجائزة الثانية يمكن أن تمنح بطريقتين فقط وذلك بعد منح الجائزة الأولى، كما أن الجائزة الثالثة تمنح بطريقة واحدة وذلك بعد منح الجائزة الأولى ثم الثانية.

و نظراً لارتباط توزيع الجائزة الثانية بالأولى، وارتباط الجائزة الثالثة بالثانية فيكون :

عدد طرق توزيع الجوائز= ٣ × ٢ × ١ = ٦ طرق.

وأيضاً لو افترضنا أنه لدينا كتابين في الإحصاء والرياضة، و أردنا منح هذه الكتب لطالبين علي الترتيب بشرط إلا يحصل أحدهما علي أكثر من كتاب واحد. في هذه الحالة يمكن افتراض أن الطالب الأول يحصل علي كتاب الإحصاء وبالتالي فان الطالب الثاني يحصل علي كتاب الرياضة وهذه طريقة، كما أنه يمكن افتراض أن الطالب الأول يحصل علي كتاب الرياضة و بالتالي فان الطالب الثاني يحصل علي كتاب الإحصاء وهذه الطريقة الثانية، ولا يوجد طرق أخري لتوزيع الكتابين. وهنا يمكن القول بأن الكتابين يمكن توزيعهما علي الطالب الأول بطريقتين و علي الطالب الثاني بطريقة واحده فقط، وبالتالي فإن عدد الطرق = ٢ × ١ = ٢ طريقة.

وأيضاً إذا كان لدينا أربعة كراسي شاغرة بالصف الأول في أحد المسارح وأردنا شغل هذه الأماكن بأربعة أفراد ممن يرغبون في الجلوس في الصف الأول، فإنه يمكن شغل المكان الأول بأربع طرق

وبعد ذلك شغل المكان الثاني بثلاث طرق فقط، ثم يتم شغل المكان الثالث بطريقتين، وأخيراً يمكن شغل المكان الرابع بطريقة واحدة فقط، و نظراً لارتباط شغل الأماكن فإن :

عدد الطرق التي يمكن بها شغل هذه الأماكن =٤ × ٣ × ٢ × ١ = ٢٤ طريقة.

كما أنه بافتراض أن مقدم برنامج إذاعي يريد أن يقدم أربعة أغاني من ستة أغاني علي مدار فترة البرنامج، فبكم طريقة يمكن تقديم هذا البرنامج، وفي هذه الحالة نجد أنه يمكن تقديم الأغنية الأولى بستة طرق والثانية بخمسة طرق والثالثة بأربعة طرق والأغنية الأخيرة بثلاثة طرق، و نظراً لارتباط الطرق فإن:

عدد طرق تقديم البرنامج الإذاعي = ٦ × ٥ × ٤ × ٣ = ٣٦٠ طريقة.

ولنا أن نختار طريقة واحدة منها لتقديمها حيث أننا هنا نهتم بالترتيب التبادلي.

القانون الأول:

في كل الأمثلة يلاحظ أنه تم خذ الشئ الأول بعدة طرق، كما أنه تم أخذ الشئ الثانى بعدة طرق أيضاً، وهكذا نحصل علي عدد الطرق الكلية بضرب عدد الطرق للأشياء علي انفراد، وعليه يكون :

عدد الطرق الكلي = عدد طرق الشئ الأول × عدد طرق الشئ الثاني ×..........

وعلي فرض أن عدد الطرق الكلي (ن) وأن عدد طرق كل شيء هو ($ن_{ر}$)

فإن : $ن = ن_{١} \times ن_{٢} \times ن_{٣} \times$............

القانون الثاني:

إذا كان لدينا مجموعة من الأشياء (ن) وتم ترتيبها معاً تبادلياً (ل) مأخوذة كلها أو بعضها بعدد مقداره

(ر) فإن :

$^{ن}ل_{ر} = ن\,(ن - ١)\,(ن - ٢)\,(ن - ٣)\,..........(ن - ر + ١)$

في مثال الطائرات فإن : $^{3}ل_{3}$ = ٣ × ٢ × ١ = ٦ طرق

في مثال الكتب فإن : $^{2}ل_{2}$ = ٢ × ١ = ٢ طريقة

في مثال الكراسي فإن : $^{4}ل_{4}$ = ٤ × ٣ × ٢ × ١ = ٢٤ طريقة

في مثال الأغاني فإن : $^{6}ل_{4}$ = ٦ × ٥ × ٤ × ٣ = ٣٦٠ طريقة

نلاحظ في الأمثلة الثلاث الأولى أننا كنا نأخذ الأشياء كلها في ترتيب المجموعات و هذا يعني أن

ن = ر، و بالتالي يمكن كتابة الصيغة الأخيرة على النحو التالي (وذلك عندما ن = ر) :

$^{ن}ل_{ر}$ = $^{ن}ل_{ن}$ = ن (ن – ١) (ن – ٢)......... ٣ × ٢ × ١

ويُطلق على الشكل السابق أسم مضروب و يأخذ الشكل ⌊ن أو ! وسوف يتم استخدام الشكل الأخير للمضروب.

كما توجد صورة أخري لعدد الطرق $^{ن}ل_{ر}$ كالتالي :

$$^{ن}ل_{ر} = \frac{ن!}{(ن-ر)!}$$

فمثلا نجد أن : $^{6}ل_{4}$ = ٦ × ٥ × ٤ × ٣ = ٣٦٠

وأيضاً : $^{6}ل_{4}$ = $\frac{٦!}{(٦-٤)!}$ = ٣٦٠

مع ملاحظة أن : صفر ! = ١

القانون الثالث:

في جميع الأمثلة السابقة كنا نفترض أن المتسابق لا يجوز له الحصول علي أكثر من جائزة واحدة، وأيضاً الطالب يحصل علي كتاب واحد فقط، كما

أن شغل الأماكن الشاغرة يتم بترتيب تنازلي عن طريق شغل المكان الأول بكل الأشياء ثم المكان الثاني بأقل من عدد الأشياء بالواحد الصحيح وهكذا.

ولكن إذا ما أطلقنا الحصول علي الجوائز كلها للفرد الواحد أو حصول الطالب الواحد علي الكتب كلها أو إمكانية شغل المكان الواحد بكل الأشياء فنجد أن عدد الطرق عبارة عن عدد الأشياء مضروبا في نفسه من المرات أو (ر) من المرات، وعلي ذلك فإن :

عدد الطرق = $ن_1 \times ن_2 \times ن_3 \times \dots\dots\dots \times ن_ر = ن^ر$

فإذا افترضنا في مثال الطائرات أنه يجوز لكل طائرة الحصول علي الأربعة جوائز كلها معاً فإن :

عدد الطرق = $٤ \times ٤ \times ٤ \times ٤ = (٤)^٤ = ٢٥٦$ طريقة

كما أنه في مثال الكتب فإن :

عدد الطرق = $2 \times 2 = (٢)^٢ = ٤$ طرق

وإذا ما كان لدينا ثمانية كتب يراد أن توزع علي ثلاثة طلاب بشرط أنه يمكن لكل طالب الحصول علي الثلاث كتب كلها فإن :

ن = ٨ ، ر = ٣

عدد الطرق = $ن^ر = ٨^3 = ٥١٢$ طريقة

وأيضاً إذا افترضنا أنه لدينا خمسة أغاني مختلفة يراد تقديمها كلها علي مدار يوم إذاعي مع إمكانية تقديم أغاني متشابهة فإن :

عدد الطرق = $٥^5 = ٣١٢٥$ طريقة

القانون الرابع :

ويخص هذا القانون الأشياء (ن) التي تحتوي على أشياء متشابهة (متكررة) مثل تكرار الحروف في الأسماء أو تكرار الأعداد سواء كانت زوجية أو فردية، فان:

$$\text{عدد الطرق} = \frac{\textbf{مضروب كل الأشياء مجتمعة}}{\textbf{حاصل ضرب مضروب كل الأشياء المتشابهة منفصلة}}$$

فإذا كان عدد الأشياء مجتمعة **ن** وكان لدينا الإعداد **س، م، ع** للأشياء الداخلة في **ن** فإن :

$$\text{عدد الطرق التبادلية} = \frac{\text{ن}!}{\text{س}! \times \text{م}! \times \text{ع}!}$$

فإذا افترضنا أنه لدينا لعبة تحتوي علي ١٠ قطع (ميكانو) منهم أربعة مثلثات و ثلاثة مستطيلات و ثلاثة مربعات فإن عدد اللعب الممكن تكوينها من كل هذه القطع يكون :

$$\frac{١٠!}{٤! \times ٣! \times ٣!} = ٤٢٠٠ \text{ لعبة}$$

وأيضاً كلمة " بابا " تحتوي علي أربعة حروف منها الباء متكررة مرتين والالف أيضاً متكررة مرتين، وعليه فان :

$$\text{عدد الأسماء التي يمكن تكوينها} = \frac{٤!}{٢! \times ٢!} = ٦ \text{ طرق}$$

كذلك لو افترضنا طلبية تتكون من أربعة أصناف وهي في الواقع ثلاث فقط نظراً لتكرار أحد الأصناف، فإنه يمكن التنسيق علي النحو التالي :

عدد الطرق = $\frac{!٤}{!٢ \times !١ \times !١}$ = ١٢ طريقة

مثال (١) :

تم تخصيص ثلاثة جوائز للفائز الأول والثاني و الثالث بأحد سباقات الخيل، فإذا علم أنه يجري في حلبة السباق عشرة متسابقين. فبكم طريقة يمكن توزيع الجوائز الثلاث بشرط أن لا يحصل الفائز إلا علي جائزة واحدة.

"الحـــــل"

عدد الطرق = $^{ن}ل_{ر}$ = $^{١٠}ل_{٣}$ = 10 x 9 x 8 = ٧٢٠ طريقة

مثال (٢) :

في المثال السابق أوجد عدد الطرق إذا كان لدينا علي الترتيب :

٥ جوائز، ٧ جائز، ١٠ جوائز.

"الحـــــل"

عدد الطرق في حالة وجود ٥ جوائز = $^{١٠}ل_{٥}$

= ١٠ × ٩ × ٨ × ٧ × ٦ = ٣٠٢٤٠ طريقة

عدد الطرق في حالة وجود ٧ جوائز = $^{١٠}ل_{٧}$

= ١٠ × ٩ × ٨ × ٧ × ٦ × ٥ × ٤ = ٦٠٤٨٠٠ طريقة

عدد الطرق في حالة وجود ١٠ جوائز = $^{١٠}ل_{١٠}$

= ١٠ × ٩ × ٨ × ..... × ٢ × ١ = ٣٦٢٨٨٠٠ طريقة

مثال (٣) :

احسب عدد الطرق الممكنة في جميع الحالات السابقة لو أُتيح لكل فائز الحصول علي كل الجوائز مرة واحدة.

"الحـــــــل"

عدد الطرق عند وجود ٣ جوائز = $٣^{١٠}$ = ٥٩,٠٤٩

عدد الطرق عند وجود ٥ جوائز = ٥^{10} = ٩,٧٦٥,٦٢٥

عدد الطرق عند وجود ٧ جوائز = ٧^{10} = ٢٨,٢٤٧,٥٢٤

عدد الطرق عند وجود ١٠ جوائز= ١٠^{10}= ١٠,٠٠٠,٠٠٠,٠٠٠

مثال (٤) :

لدى إحدي الشركات ١٠ مهندسين و ١٥ محاسب و ٣ أطباء، فإذا أرادت الشركة تشكيل لجنة من ثلاثة أشخاص بحيث تحتوي اللجنة علي واحد من كل نوع. فبكم طريقة يمكن ذلك إذا علمت أنه يعطي أهمية لترتيب الأشخاص عند تشكيل اللجنة.

"الحـــــــل"

عدد طرق اختيار مهندس واحد من عشرة مهندسين = $^{١٠}ل_{١}$ = ١٠ طرق

عدد طرق اختيار محاسب واحد من ١٥ محاسب = $^{١٥}ل_{١}$ = ١٥ طريقة

عدد طرق اختيار طبيب واحد من ٣ أطباء = $^{٣}ل_{١}$ = ٣ طرق

وعلي ذلك فإن عدد الطرق الكلي = ٣ × ١٥ × ١٠ = ٤٥٠ طريقة

مثال (٥) :

إذا علمت أن $^{٥}ل_{ر}$ = ٦٠ فأوجد قيمة ر.

"الحـــــــل"

$^{٥}ل_{ر}$ = ٥ (٥ – ١) (٥ – ٢)..........(٥ – ر + ١) = ٦٠

وبتحليل القيمة ٦٠ = 3 x 4 x 5

أي أن ٥ – ر + ١ = ٣

∴ ر = ٣

مثال (٦):

اثبت أن : $\frac{(ن+٩)!}{(ن+٧)!}$ = $ن^{٢}$ + ١٧ ن + ٧٢

"الحـــــل"

$\frac{(ن+٩)!}{(ن+٧)!} = \frac{(ن+٩)(ن+٨)(ن+٧)!}{(ن+٧)!}$ = (ن + ٩) (ن + ٨)

وحيث ان : $ن^{٢}$ + ١٧ن + ٧٢ = (ن+٩) (ن+٨)

∴ $\frac{(ن+٩)!}{(ن+٧)!}$ = $ن^{٢}$ + ١٧ن + ٧٢

مثال (٧) :

أوجد عدد التباديل الممكنة للمجموعة أ، ب، ج، د.

"الحـــــل"

عدد الطرق = $^{ن}ل_{ر}$ = $^{٤}ل_{٤}$ = ٤ × ٣ × ٢ × ١ = ٢٤ طريقة

مثال (٨) :

أوجد عدد الأرقام الثنائية الممكن تكوينها من الأرقام ٣، ٥، ٧، ٩.

"الحـــــل"

عدد الأرقام = $^{ن}ل_{ر}$ = $^{٤}ل_{٢}$ = ٤ × ٣ = ١٢ رقم.

مثال (٩) :

أوجد عدد الأرقام الثلاثية الممكن تكوينها من الأرقام ١،٣،٥،٧،٩.

"الحـــــل"

عدد الأرقام = $^{ن}ل_{ر}$ = $^{٥}ل_{٣}$ = $\frac{٥!}{(٥-٣)!}$ = ٦٠ رقم.

مثال (١٠):

كم عدد طرق ترتيب الحروف الواردة في كلمة المشمش بشرط أن تؤخذ مـرة واحدة.

"الحـــــل"

عدد الحروف كلها (ن) = ٦

عدد حروف (أ) = ١ ، عدد حروف (ل) = ١

عدد حروف (م) = ٢ ، عدد حروف (ش) = ٢

∴ عدد الطرق = $\frac{٦!}{١!\times ١!\times ٢!\times ٢!}$ = ١٨٠ طريقة.

مثال (١١):

ما هو عدد الأرقام المختلفة الممكن تكوينها من الرقم ٦٦٦٢٤٤.

"الحـــــل"

عدد الحروف كلها (ن) = ٦ ، عدد مرات تكرار ٢ = ١

عدد مرات التكرار ٤ = ٢ ، عدد مرات التكرار ٦ = ٣

عدد الأرقام = $\frac{٦!}{٢!\times ١!\times ٣!}$ = ٦٠ طريقة.

ثانياً : القوانين الأساسية للتوافيق

تعرف التوافيق بأنها عدد الطرق التي يتم بها اختيار مجموعة من الأشياء (ر) من بين مجموعة أكبر أو مساوية لها من الأشياء (ن) وذلك بغض النظر عـن

الترتيب، ويرمز لها بالرمز $^{ن}ق_{ر}$ فإذا افترضنا أنه لدينا ثلاثة أبطال في رفع الأثقال وأردنا أن نرشح منهم أثنين للاوليمبياد، في هذه الحالة تكون طرق الاختيار هي :

الطريقة الأولى : البطل الأول و البطل الثاني

الطريقة الثانية : البطل الأول و البطل الثالث

الطريقة الثالثة : البطل الثاني و البطل الثالث

هكذا نجد أن كل مجموعة تختلف تماماً عن المجموعة الأخرى، وهذا يعني أننا نقوم باختيار شخصين من ثلاثة أشخاص و هذا هو المقصود بعملية التوافيق. وهي عملية نبدأ بها أولاً إذا أردنا الاختيار أما إذا كان المراد هو منح جوائز فإننا هنا نقوم بالترتيب بعد الاختيار، فقد تصبح الطريقة الأولى هي البطل الثاني والبطل الأول وتصبح الطريقة الثانية هي البطل الثالث والبطل الأول كما تصبح الطريقة الثالثة هي البطل الثالث والبطل الثاني،وبذلك يكون عدد التباديل مع الاهتمام بالترتيب هي ستة طرق أما عدد التوافيق أو الاختيارات فهي ثلاثة فقط.

وهكذا يمكن ملاحظة أن :

عدد التباديل = $^{٣}ل_{٢}$ = ٣ × ٢ = ٦ طرق، ونظراً لأن كل طريقة من الطرق السابقة يمكن أن تعطي لنا عدداً من الطرق التبادلية = ٢! أي ٢ × ١ = ٢ طريقة.

فيكون عدد الطرق التوافقية = $\frac{^{٣}ل_{٢}}{٢!} = \frac{٦}{٢}$ = ٣ طرق.

القانون الأول :

$^{ن}ق_{ر}$ تمثل عدد طرق اختيار (ر) من الأشياء من بين (ن) من الأشياء دون مراعاة لترتيب مجموعة المفردات المختارة و تساوي :

$$^{ن}ق_{ر} = \frac{^{ن}ل_{ر}}{ر!} = \frac{ن!}{ر!(ن-ر)!}$$

مثال (١٢):

بكم طريقة يمكن اختيار لجنة من ثلاث سيدات من بين ثمان سيدات.

"الحـــــل"

عدد الطرق = $^{ن}ق_{ر} = \frac{ن!}{ر!(ن-ر)!} = \frac{٨!}{٣!\ ٥!} =$ ٢٨٠ طريقة

مثال (١٣):

يراد تشكيل لجنة مكونة من سيدتين و ستة رجال من بين عشرة سيدات و ثمانية رجال، فما هي عدد الطرق الممكنة لذلك.

"الحـــــل"

عند اختيار سيدتين من عشرة سيدات :

عدد الطرق = $^{ن}ق_{ر} = \frac{ن!}{ر!(ن-ر)!}$

$^{١٠}ق_{٢} = \frac{١٠!}{٢!\ ٨!} =$ ٤٥ طريقة

عند اختيار ستة رجال من ثمانية رجال :

عدد الطرق = $^{٨}ق_{٦} = \frac{٨!}{٦!\ ٢!} =$ ٥٦ طريقة

عدد طرق اختيار اللجنة = ٤٥ × ٥٦ = ٢٥٢٠ طريقة

مثال(١٤) :

يحتوي أحد المكاتب الاستشارية علي ١٠ أشخاص يقومون بالعمل الإداري، ١٥ شخص يقومون بالعمل الفني، ٥ شخص يقومون بالعمل الهندسي. ويـــراد تشكيل لجنة تتكون من ثلاثة إداريين و أثنين من الفنيين و مهندس واحد. فــبكم طريقة يمكن ذلك.

"الحـــــــل"

عدد الطرق = $^{١٠}\text{ق}_{٢} \times {}^{١٥}\text{ق}_{٢} \times {}^{٥}\text{ق}_{١}$

= ٤٥ × ١٠٥ × ٥ = ٢٣٦٢٥ طريقة.

القانون الثاني :

$$^{ن}\text{ق}_{ن} = ١$$

وهذا أمر طبيعي لأنه يوجد طريقة واحده لاختيار **ن** من الأشياء من بين **ن** من الأشياء،

ويمكن إثبات ذلك كما يلي :

$$^{ن}\text{ق}_{ن} = {}^{ن}\text{ل}_{ن} \div ن! = \frac{ن!}{ن!} = ١$$

القانون الثالث:

$$^{ن}\text{ق}_{ن-ر} = {}^{ن}\text{ق}_{ر}$$

ويمكن إثبات ذلك كما يلي :

$$^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ن}-\text{ر}} = \frac{\text{ن}!}{(\text{ن}-\text{ر})!\,(\text{ن}-(\text{ن}-\text{ر}))!} = \frac{\text{ن}!}{\text{ر}!\,(\text{ن}-\text{ر})!} = {}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}}$$

ملاحظات :

(١) إذا كان $^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{أ}} = {}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ب}}$

فإن : أ = ب أو أ + ب = ن

(٢) $^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ن}} = ١$

مثال (١٥):

ما هو عدد طرق انتخاب لجنة مكونة من ست أعضاء من بين ثمانية أفراد.

"الحــــــل"

عدد الطرق = $^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}} = {}^{٨}\text{ق}_{٦} = {}^{٨}\text{ق}_{٢}$

$$= \frac{٨!}{٢!\ ٦!} = ٢٨ \text{ طريقة}$$

مثال (١٦):

تقدم لبعض الوظائف الخالية في إحدى الشركات ٥ مهندسين، ٤ محاسبين، ٦ محاميين، فإذا كان المطلوب تعيينهم هو ٣ مهندسين، ٢ محاسب، ٤ محاميين. فما هي عدد الطرق الممكنة للتعيين. وإذا كان أحد المهندسين يجب أن يكون من المعينين في الشركة فما هي عدد طرق الاختيار الممكنة.

"الحـــــل"

	مهندسين	محاسبين	محامين
ن	٥	٤	٦
ر	٣	٢	٤

عدد الطرق = $^{٥}ق_{٣} \times {}^{٤}ق_{٢} \times {}^{٦}ق_{٤}$

$$= \frac{٥!}{٣!\ ٢!} \times \frac{٤!}{٢!\ ٢!} \times \frac{٦!}{٤!\ ٢!}$$

= ١٠ × ٦ × ١٥ = ٩٠٠ طريقة

إذا كان أحد المهندسين يجب أن يكون من المعينين :

	مهندسين	محاسبين	محامين
ن	٥ – ٤ =١	٤	٦
ر	٣ – ١ =٢	٢	٤

عدد الطرق = $^{٤}ق_{٢} \times {}^{٤}ق_{٢} \times {}^{٦}ق_{٤}$

= ٦ × ٦ × ١٥ = ٥٤٠ طريقة.

مثال (١٧):

إذا علم أن $^{ن}ل_{٣}$ = ٢٤ فأوجد قيمة ن.

"الحـــــل"

من المفروض أن $^{ن}ل_{٣}$ = ن (ن – ١) (ن – ٢) = ٢٤

إذن : ن (ن – ١) (ن – ٢) = ٤ × ٣ × ٢

أي أن : ن = ٤

تمـــــارين

(١)بين مدي صحة أو خطأ العبارات التالية مع التعليق :

- عند تكوين التباديل فإننا نبدأ بالتوافيق أولاً.
- عند تكوين التوافيق فإننا نبدأ بالتباديل أولاً.
- عدد الطرق التبادلية أكبر من عدد الطرق التوافقية.
- عدد الطرق التوافقية أكبر من عدد الطرق التبادلية.
- التوافيق هي عملية اختيار ولكن التباديل هي عملية ترتيب.
- التباديل هي عملية الاختيار و التوافيق هي عملية الترتيب.
- عند تكوين الطرق التبادلية نهتم جداً بالترتيب داخل المجموعات.
- عند تكوين الطرق التوافقية لا نهتم بالترتيب بقدر اهتمامنا بالمجموعة في حد ذاتها.
- عدد طرق سحب كرتين من ألوان معينة من مجموعة كرات ذات الألوان المختلفة يخضع في إيجاده لأسلوب التباديل.
- عدد طرق سحب كرتين من ألوان معينة من مجموعة كرات ذات الألوان المختلفة يخضع في إيجادة لأسلوب التوافيق.
- عدد طرق جلوس مجموعة من الأشخاص علي عدد معين من المقاعد يخضع في إيجاده لفكرة التوافيق.
- عدد طرق قراءة أحد الصحف أو المجلات يخضع في تكوينه للتوافيق.
- عدد طرق فتح أحد الحقائب التي تحمل قفل رقمي يخضع في تحديده للتباديل.

- عدد طرق تكوين جدول الأعداد العشوائية المستخدم في سحب العينات العشوائية يخضع في تحديده للتباديل.
- عدد طرق منح مجموعة من الجوائز لعدد من الفائزين يخضع في تحديده لفكرة التباديل
- عدد طرق تقديم أحد البرامج التليفزيونية (من حيث المادة المقدمة) يخضع في تكوينه لفكرة التوافيق.

(٢) أكتب نتائج كل من : $^{\text{ن}}\text{ل}_{\text{ن}}$، $^{\text{ن}}\text{ل}_{\text{صفر}}$، **صفر !**

(٣) إذا علم أن :

$^{\text{ن}}\text{ل}_{٩} = ٣٦٢٨٨٠٠$ فأوجد قيمة ن.

$^{\text{ن}}\text{ل}_{٧} = ٥٠٤٠$ فأوجد قيمة ن.

$^{\text{ن}}\text{ل}_{٥} = ١٥١٢٠٠$ فأوجد قيمة ن.

$^{\text{ن}}\text{ل}_{٣} = ٧٢٠$ فأوجد قيمة ن.

$^{\text{ن}}\text{ل}_{٢} = ٤٢$ فأوجد قيمة ن.

(٤) أوجد قيمة ر إذا علم أن :

$^{١٠}\text{ل}_{\text{ر}} = ٣٦٢٨٨٠٠$ ، $^{١٠}\text{ل}_{\text{ر}} = ٧٢٠$

$^{١٠}\text{ل}_{\text{ر}} = ٥٠٤٠$ ، $^{٧}\text{ل}_{\text{ر}} = ٤٢$

$^{١٠}\text{ل}_{\text{ر}} = ١٥١٢٠٠$ ، $^{٧}\text{ل}_{\text{ر}} = ٥٠٤٠$

(٥) حقيبة تقفل باستخدام قفل رقمي يحتوي علي الأرقام صفر،١،٢،٣ فبكم طريقة يمكن فتح هذه الحقيبة في حالة عدم معرفة رقمها السري.

(٦) ثلاثة كتب (رياضة، إحصاء، تأمين) يراد وضعها في أحد الرفوف، فبكم طريقة يمكن ذلك.

(٧) ما هو عدد الطرق في التمرين السابق إذا أريد البدء دائماً بكتاب الإحصاء.

(٨) في امتحان مادة الرياضة المالية يختار الطالب سؤالين من كل قسم، فإذا علم أن كل قسم يحتوي علي ثلاثة أسئلة، فبكم طريقة يمكن للطالب إجابة هذا الامتحان إذا كان ترتيب إجابة الأسئلة له أهمية عند التصحيح.

(٩) كم عدداً يمكن تكوينه من الأرقام (صفر، ١، ٢، ٣، ٤، ٥) بشرط كل عدد يحتوي علي ثلاثة أرقام.

(١٠) في التمرين السابق كم عدداً يمكن تكوينه بشرط البداية بالصفر.

(١١) كم عدداً يمكن تكوينه من الأعداد ٢، ٢، ٢، ٣، ٣، ٣، ٣، ٤، ٥.

(١٢) كم إسماً يمكن تكوينه من حروف الاسم : بلبل، زمزم، محرم، شيرين.

(١٣) خمسة متسابقين يراد توزيع ثلاث جوائز لكل من الفائز الأول و الثاني و الثالث. فبكم طريقة يمكن ذلك. وإذا أعطينا الحق لكل فائز في الثلاث جوائز مرة واحدة فما هو عدد الطرق.

(١٤) فريق لكرة القدم يتكون من ٢٥ لاعباً يراد تكوين عدد من المجموعات منه. فبكم طريقة يمكن ذلك إذا علم أن عدد كل مجموعة إحدي عشر لاعباً.

(١٥) في التمرين السابق بفرض أن الفريق يحتوي علي :

(٣) حارس مرمي ، (١٥) مهاجم، (٧) مدافع

فبكم طريقة يمكن تكوين المجموعات المطلوبة علماً بأن كل مجموعة يجب أن تحتوي علي حارس مرمي واحد و أربعة مهاجمين و أربعة مدافعين.

(١٦) حديقة حيوان بها (٦٠ قرداً و ٤ أسود و ٧ فيلة و ٦ من كلب البحر)
أريد إنشاء حديقة جديدة كفرع من هذه الحديقة في مكان آخر بحيث يتم اختيار حيواناتها من الحديقة الأصلية على النحو التالي :
(٢٠ قرداً وأسدين و٣ أفيال و٣ من كلب البحر) فبكم طريقة يمكن ذلك ؟

(١٧) صندوق به ٣٠ مصباح كهربائي منهم ٢٠ صالح للإنارة والباقي غير صالح. تم اختيار ثلاث مصابيح عشوائياً من هذه المجموعة :

- بكم طريقة يمكن سحب مصباحين صالحين و الآخر غير صالح.
- بكم طريقة يمكن سحب مصباحين غير صالحين و الآخر صالح.
- بكم طريقة يمكن سحب الثلاث مصابيح غير صالحة.
- بكم طريقة يمكن سحب الثلاث مصابيح صالحة.
- ما هو العدد الكلي لطرق السحب.

(١٨) إذا علم أن : $^{ن}ل_{ر}$ = ٧٢٠، $^{ن}ق_{ر}$ = ١٢٠ فأوجد قيمتي ن، ر.

(١٩) قررت الإدارة العامة للبعثات إرسال ١٠ أفراد من موظفيها للعمل بالمكاتب الثقافية موزعين كالتالي : ٣ إلي أمريكا، ٣ إلي بريطانيا، ٤ إلي روسيا.
فإذا علمت أن عدد العاملين بالإدارة العامة للبعثات ٣٠ موظف مرشحين كالتالي : ١٠ يتم الاختيار منهم لأمريكا، ١٠ يتم الاختيار منهم لبريطانيا، ١٠ يتم الاختيار منهم لروسيا.
والمطلوب : تحديد عدد الطرق الممكن الاختيار بها إلي الجهات المختلفة.

الباب الثاني
المعادلات الرياضية

في مختلف العلوم نواجه علاقات بين ظواهر مختلفة (متغيرات) ونرغب في التعبير عن هذه المعادلات رياضياً. إن علم الاقتصاد مثلاً يقوم على دراسة ظواهر كثيرة قابلة للتغيير مثل الطلب والعرض والسعر وحجم الإنتاج والاستهلاك القومي والدخل القومي .... الخ. وكل ظاهرة يمكن التعبير عنها رقمياً وتكون قيمتها قابلة للتغير تسمى رياضياً "متغير"، وبذلك يمكننا تعريف المتغير بأنه كل ظاهرة لا تبقى قيمتها ثابتة بل تتغير في موضوع الدراسة الخاصة بها. وعكس ذلك فإن الثابت هو كل قيمة تبقى كما هي دون تغير في موضوع الدراسة.

الدالة (Function)

إذا كان لدينا فئتين أ ، ب بحيث يعتمد تحديد عناصر الفئة ب على عناصر الفئة أ . أي أنه يوجد علاقة بين عناصر الفئة أ وعناصر الفئة ب ، وتأخذ هذه العلاقة صياغة رياضية يطلق عليها الدالة. وبالتالي فإن الدالة هي قاعدة رياضية باستخدامها يتم تحديد لكل عنصر س بحيث س ∋ أ عنصراً وحيداً مناظراً له ص بحيث ص ∋ ب.

ويرمز إلى هذه القاعدة بالرمز (د) و تكتب على النحو التالي :

د : أ ⟵ ب   أو   أ ⟵ ب

وتسمى الفئة أ بنطاق Domain الدالة د ، الفئة ب بالمدى للدالة د. فإذا كان س ∋ أ ، ص ∋ ب بحيث يتم تحديد ص باستخدام الدالة د عند العنصر المناظر س ونرمز لذلك بالرمز ص = د (س). وبالتالي فإن الدالة تعتبر جهاز للمدخلات والمخرجات، فباستخدام القاعدة الرياضية (الدالة) يتم تحويل المدخلات (النطاق) إلى مخرجات (المدى).

مثال (١)

إذا كان لدينا الدالة : د (س) = س^٢ بحيث س ∋ فئة الأعداد الحقيقية (ح) فإن نطاق هذه الدالة هو فئة الأعداد الحقيقية (ح)، والمدى هو فئة الأعداد الحقيقية غير السالبة ، ويتضح ذلك مما يلي :

س = صفر ← د (س) = (٠)^٢ = صفر

س = ١ ← د (١) = (١)^٢ = ١

س = ٢ ← د (٢) = (٢)^٢ = ٤

س = − ٢ ← د (− ٢) = (− ٢)^٢ = ٤

مثال (٢) :

إذا كانت الدالة معرفة كالتالي :

د (س) = س^٣ + س^٢

فإن نطاق هذه الدالة هو فئة الأعداد الحقيقية (ح) والمدى هو أيضاً فئة الأعداد الحقيقية حيث :

س = صفر ← د(صفر) = $(٠)^{٣}$ + $(٠)^{٢}$ = صفر

س = ٢ ← د (٢) = $(٢)^{٣}$ + $(٢)^{٢}$ = ١٢

س = − ٢ ← د (− ٢) = $(-٢)^{٣}$ + $(-٢)^{٢}$ = − ٤

س = ٣ ← د (٣) = $(٣)^{٣}$ + $(٣)^{٢}$ = ٣٦

س = − ٣ ← د (− ٣) = $(-٣)^{٣}$ + $(-٣)^{٢}$ = − ١٨

مثال (٣) :

إذا كانت دالة التكلفة الكلية (أ) لأحد المنتجات في أحد الشركات هي : أ = د (س) = ٤٨٠٠ + ٢ س ، حيث تشير س إلى عدد الوحدات المنتجة يومياً من هذا المنتج ، أي أن قيمة أ تعتمد على قيمة س.

فيكون نطاق الدالة (د) هو س ، ومداها هو أ.

فإذا قامت الشركة بإنتاج ١٠٠ وحدة يومياً تكون تكلفة هذا الإنتاج هي :

أ = د (١٠٠) = ٤٨٠٠ + ٢ (١٠٠) = ٥٠٠٠ جنيه.

وإذا كان الإنتاج اليومي هو ١٠٠٠ وحدة فإن التكلفة تكون :

أ = د (١٠٠٠) = ٤٨٠٠ + ٢ (١٠٠٠) = ٦٨٠٠ جنيه.

مثال (٤) :

أوجد نطاق كل من الدوال الآتية :

(أ) د (س) = ٤ $س^{٢}$ + ٢ س + ٤ (ب) د (س) = $\sqrt{س - ٧}$

(ج) د (س) = $\frac{١}{س - ٥}$ (د) د (س) = $\sqrt{٣٦ - س^{٢}}$

الحـــــل

(أ) يتكون نطاق الدالة من جميع الأعداد الحقيقية بمعنى أن :

نطاق الدالة = { س : س عدد حقيقي} = ح

وذلك لأنه يمكن التعويض عن س بأي عدد حقيقي فينتج قيمة واحدة للدالة د (س).

(ب) نطاق الدالة = {س : س ≤ ٧}

أي أن هذه الدالة معرفة لجميع قيم س التي تجعل س – ٧ ≤ ٠ ، أي أنه س ≤ ٧.

(ج) نطاق الدالة = {س : س عدد حقيقي ، س ≠ ٥}

وذلك لأنه إذا كانت س = ٥ فإن المقام يساوي صفر وبالتـــالي تكــون د (س) غير معرفة (لأن القسمة على صفر غير معرفة). أي أنـــه يمكـــن التعويض عن س بأي قيمة تختلف عن ٧ فتنتج قيمة واحد للدالة د (س).

(د) النطاق = {س : – ٦ ≥ س ≥ ٦}

حيث أن الدالة تكون معرفة لقيم س التي تجعل ٣٦ – س٢ ≤ ٠ أي أن ٣٦ ≤ س^{٢}.

مثال (٥) :

يتقاضى عامل في أحد المصانع أجراً أسبوعياً قدره ١٠٠٠ جنيه ويضاف إليها ٢٥ جنيه عن كل ساعة عمل إضافي. والمطلوب :

(أ) إيجاد الدالة التي تعبر عن إجمالي الأجر الأسبوعي (ص) لهذا العامل بدلالة عدد ساعات العمل الإضافي أسبوعياً (س).

(ب) احسب إجمالي الأجر الأسبوعي لهذا العامل إذا عمل ١٢ ساعة إضافية في أحد الأسابيع.

الحـــل

(أ) إجمالي أجر العامل هو عبارة عن الأجر الأساسي ويضاف إليه إجمالي الأجر الإضافي والذي يتم حسابه بضرب عدد ساعات العمل الإضافي في أجر ساعة العمل الإضافي، فتكون دالة إجمال الأجر الأسبوعي كالتالي :

ص = د (س) = ١٠٠٠ + ٢٥ س

(ب) إذا عمل هذا العامل ١٢ ساعة عمل إضافي يكون إجمالي أجره كالتالي :

ص = د (س) = د (١٢) = ١٠٠٠ + ٢٥ (١٢)

= ١٠٠٠ + ٣٠٠ = ١٣٠٠ جنيه

مثال (٦) :

إذا كانت دالة التكلفة الكلية لأحد مصانع الحاسبات الآلية هي :

ص = د (س) = ٥٠ س + ٢٥٠٠

حيث ص تمثل التكلفة الكلية و س تمثل حجم الإنتاج ، فإذا كان الحد الأقصى الذي يمكن أن يقوم المصنع بإنتاجه هو ١٠٠٠ جهاز. فأوجد نطاق ومدى هذه الدالة.

الحـــل

حيث أن الحد الأدنى لحجم الإنتاج (س) هو صفر والحد الأقصى ١٠٠٠ جهاز، فإن المتغير س يمكن أن يأخذ أي قيمة تتراوح بين صفر و ١٠٠٠ جهاز وبذلك يكون :

نطاق الدالة = {س : صفر ≥ س ≥ ١٠٠٠}

ثم نحسب التكلفة ص عند الحدين الأدنى والأقصى للإنتاج فنجد أن :

الحد الأدنى للتكلفة عند س = صفر هو :

ص = د (٠) = ٥٠ (٠) + ٢٥٠٠ = ٢٥٠٠ جنيهاً

وكذلك يكون الحد الأقصى للتكلفة عند س = ١٠٠٠ هو :

ص = د (١٠٠٠) = ٥٠ (١٠٠٠) + ٢٥٠٠ = ٥٧٥٠٠ جنيهاً

وبالتالي فإن التكلفة (ص) تأخذ قيماً تتراوح بين ٢٥٠٠ جنيهاً و ٥٧٥٠٠ جنيه، وبذلك يكون :

المدى = {ص : ٢٥٠٠ ≥ ص ≥ ٥٧٥٠٠}

ملاحظة : عندما يكون للنطاق حد أدنى وحد أعلى يسمى بالنطاق المقيد Restricted domain، وكذلك عندما يكون للمدى أيضاً حد أدنى وحد أعلى يسمى بالمدى المقيد Restricted range.

مثال (٧) :

إذا كانت ص تمثل دالة الطلب على أحد المنتجات ، س سعر بيع الوحدة من هذا المنتج حيث :

ص = د (س) = ٤٠٠ – ٥ س ، ١٠ ≤ س ≤ ٨٠

فأوجد :

(أ) المدى المقيد.

(ب) الطلب عند السعر ٥٠ جنيه.

الحـــل

(أ) يتم إيجاد الطلب (ص) عند الحد الأدنى للسعر س = ١٠ فيكون :

ص = د (١٠) = ٤٠٠ – ٥ (١٠) = ٣٥٠ وحدة.

ثم نوجد الطلب (ص) عند الحد الأقصى للسعر س = ٨٠ فيكون :

ص = د (٨٠) = ٤٠٠ – ٥ (٨٠) = صفر

أي أن : صفر ≤ المدى ≤ ٣٥٠

(ب) عند س = ٥٠ فإن :

ص = د (٥٠) = ٤٠٠ – ٥ (٥٠) = ١٥٠ وحدة

أنواع الدوال Types of functions

سوف يتم دراسة بعض الأنواع الهامة من الدوال وهي :

أولاً : الدالة الخطية Linear Function

هي الدالة التي إذا تم تمثيله بيانياً تعطي خط مستقيم وتتميز بأنها تتغير بشكل ثابت، وتأخذ الصورة العامة لها الشكل التالي :

ص = أ س + ب

حيث يمثل أ ميل الخط المستقيم، وتمثل ب مقطع الدالة (قيمة الدالة عندما س = صفر) أو بمعنى آخر نقطة تقاطع المستقيم الذي يمثل الدالة الخطية مع محور الصادات (صفر ، ب)

إيجاد معادلة الخط المستقيم الذي يمثل الدالة الخطية بمعلومية نقطتين

(س$_1$ ، ص$_1$) ، (س$_2$ ، ص$_2$) :

(١) الميل (أ) $\frac{ص_2 - ص_1}{س_2 - س_1}$

(٢) التعويض في المعادلة على الصورة : ص − ص$_1$ = أ (س − س$_1$)

(٣) وضع المعادلة على الصورة العامة : ص = أ س + ب

مثال (٨) :

أوجد الميل والمقطع للدوال الخطية التالية :

(١) ص = ١٥ + ٦ س (٣) ٢ ص − ١٨ س − ١٠ = ٠

(٢) ص = − ٣ س − ١٣ (٤) ٥ ص + ١٥ س = ٢٥

الحـــل

(١) ص = ١٥ + ٦ س

الميل (أ) = ٦ ، المقطع (ب) = ١٥

(٢) ص = − ٣ س − ١٣

الميل (أ) = − ٣ ، المقطع (ب) = − ١٣

(٣) ٢ ص − ١٨ س − ١٠ = ٠

٢ ص = ١٨ س + ١٠

ص = ٩ س + ٥

الميل (أ) = ٩ ، المقطع (ب) = ٥

(٤) ٥ ص + ١٥ س = ٢٥

٥ ص = ٢٥ − ١٥ س

ص = ٥ − ٣ س

الميل (أ) = − ٣ ، المقطع = ٥

مثال (٩) :

أوجد معادلة الخط المستقيم الذي :

(١) يمر بالنقطتين (١٥ ، ٣٠) ، (٣٠ ، ٦٠).

(٢) يمر بالنقطتين (١ ، − ٢) ، (٥ ، ١٠).

(٣) يمر بنقطة الأصل والنقطة (٣ ، ٦).

(٤) يقطع محور الصادات في (٦) وميله (٤).

(٥) يمر بالنقطة (٧ ، ١٥) وميله (٤).

الحـــل

(١) يمر بالنقطتين (١٥ ، ٣٠) ، (٣٠ ، ٦٠).

↓ ↓ ↓ ↓

س١ ص١ س٢ ص٢

الميل (أ) = $\frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \frac{٦٠ - ٣٠}{٣٠ - ١٥} = ٢$

∴ (ص − ص$_١$) = أ (س − س$_١$)

ص − ٣٠ = ٢ (س − ١٥)

ص − ٣٠ = ٢ س − ٣٠

ص = ٢ س − ٣٠ + ٣٠

ص = ٢ س

(٢) يمر بالنقطتين (١ ، − ٢) ، (٥ ، ١٠).

$$\begin{array}{cccc} ١ & −٢ & ٥ & ١٠ \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ س_١ & ص_١ & س_٢ & ص_٢ \end{array}$$

(أ) = $\frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \frac{١٠ - (-٢)}{٥ - ١} = \frac{١٠ + ٢}{٤} = ٣$

∴ (ص − ص$_١$) = أ (س − س$_١$)

ص − (− ٢) = ٣ (س − ١)

ص + ٢ = ٣ س − ٣

ص = ٣ س − ٥

(٣) يمر بنقطة الأصل (٠ ، ٠) ، والنقطة (٣ ، ٦)

الميل (أ) = $\frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \frac{٦ - ٠}{٣ - ٠} = ٢$

∴ (ص − ص$_١$) = أ (س − س$_١$)

(ص − ٠) = ٢ (س − ٠)

ص = ٢ س

(٤) يقطع محور الصادات في (٦) وميله (٤).

أ = ٤ ، ب = ٦

∴ ص = أ س + ب

ص = ٤ س + ٦

(٥) يمر بالنقطة (٧ ، ١٥) وميله (٤)

(ص – ص١) = أ (س – س١)

(ص – ١٥) = ٤ (س – ٧)

ص – ١٥ = ٤ س – ٢٨

ص = ٤ س – ١٣

ثانياً : الدالة التربيعية Quadratic function

تأخذ الدالة التربيعية الصورة التالية :

ص = د (س) = أ س^{٢} + ب س + جـ

وتسمى معادلة من الدرجة الثانية لأن أعلى أس لـ (س) فيها = ٢ ، كما أن أ ، ب ، جـ تعتبر قيماً ثابتة بشرط أن أ ≠ صفر.

فمثلاً الدالة : ص = د (س) = ٥ س^{٢} + ١٢ س – ٣ هي دالة تربيعية فيها أ = ٥ ، ب = ١٢ ، ج = – ٣ وكذلك الدالة : ص = د (س) = س^{٢} + ٢ هي دالة تربيعية فيها أ = ١ ، ب = ٠ ، جـ = ٢

ملاحظة :

يمكن حل معادلة الدرجة الثانية باستخدام القانون العام الذي يأخذ الصورة التالية :

$$س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^{٢} - ٤أجـ}}{٢أ}$$

فإذا كان :

* المقدار ($ب^٢$) أكبر من (٤ أ ج) فسيكون هناك قيمتين لـــ س (يطلق عليهما جذري المعادلة).

* المقدار $ب^٢$ = ٤أجـــ فسوف توجد قيمة واحدة لـــ س وتساوي $\frac{-ب}{٢أ}$ وهي تمثل حل وحيد.

* المقدار ($ب^٢$) أصغر من (٤أجـــ) فلن توجد قيمة حقيقية لـــ س ، وسوف يحتوي الحل على مقدار تخيلي.

مثال (١٠) :

أوجد قيمة س في الدوال الآتية :

(١) $س^٢$ + ٨ س + ١٥ = صفر

(٢) $س^٢$ + ٦ س + ٤ = صفر

الحـــــل

(١) $س^٢$ + ٨ س + ١٥ = صفر

يمكن تحليل هذه الدالة كالتالي :

(س + ٣) (س + ٥) = صفر

∴ س = − ٣ أو س = − ٥

ويمكن إيجاد قيمة س أيضاً باستخدام القانون العام كالتالي :

أ = ١ ، ب = ٨ ، جـــ = ١٥

$$\therefore س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^{٢} - ٤اجـ}}{٢ا}$$

$$\therefore س = \frac{-٨ \pm \sqrt{٨^{٢} - ٤(١)(١٥)}}{٢\times١} = \frac{-٨ \pm \sqrt{٤}}{٢} = \frac{-٨ \pm ٢}{٢}$$

أما أن

$$س = \frac{-٨ - ٢}{٢} \qquad \text{أو} \qquad س = \frac{-٨ + ٢}{٢}$$

$$\therefore س = -٥ \qquad\qquad س = -٣$$

(٢) س٢ + ٦ س + ٤ = صفر

حيث أنه لا يمكن تحليل هذه الدالة فسوف يتم إيجاد قيمة س باستخدام القانون العام مباشرة.

أ = ١ ، ب = ٦ ، جـ = ٤

$$\because س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^{٢} - ٤اجـ}}{٢ا}$$

$$\therefore س = \frac{-٦ \pm \sqrt{(٦)^{٢} - ٤(١)(٤)}}{٢\times١} = \frac{-٦ \pm \sqrt{٢٠}}{٢}$$

أما أن

$$س = \frac{-٦ - \sqrt{٢٠}}{٢} \qquad \text{أو} \qquad س = \frac{-٦ + \sqrt{٢٠}}{٢}$$

مثال (١١)

أوجد جذور المعادلة : ٢ س^{٢} − ٣ س − ١ = صفر

أ = ٢ ، ب = − ٣ ، جـ = − ١

$$\therefore \text{س} = \frac{-\text{ب} \pm \sqrt{\text{ب}^{٢} - ٤\text{أجـ}}}{٢\text{أ}}$$

$$\therefore \text{س} = \frac{-(٣) \pm \sqrt{(-٣)^{٢} - ٤(٢)\ (-١)}}{٢ \times ٢} = \frac{٣ \pm \sqrt{١٧}}{٤}$$

∴ جذور المعادلة هي

$$\text{س} = \frac{٣ - \sqrt{١٧}}{٤} \qquad \text{أو} \qquad \text{س} = \frac{٣ + \sqrt{١٧}}{٤}$$

تطبيقات تجارية

مثال (١٢) :

إذا كانت تكلفة إنتاج ٢٠٠ وحدة في أحد المصانع هي ١٧٥٠٠ جنيهاً ، وتكلفة إنتاج ٣٠٠ وحدة في نفس المصنع هي ٢٥٥٠٠ جنيهاً . فأوجد معادلة الخط المستقيم التي تعبر عن إجمالي التكلفة ، ثم أوجد التكلفة الثابتة والتكلفة المتغيرة ، وأحسب تكلفة إنتاج ٥٠٠ وحدة.

الحــــل

(٢٠٠ وحدة ، ١٧٥٠٠ جنيه) ، (٣٠٠ وحدة ، ٢٥٥٠٠ جنيه)

$$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$$

$$\text{س}_١ \quad \text{ص}_١ \quad \text{س}_٢ \quad \text{ص}_٢$$

$$\text{الميل (أ)} = \frac{\text{ص}_٢ - \text{ص}_١}{\text{س}_٢ - \text{س}_١} = \frac{٢٥٥٠٠ - ١٧٥٠٠}{٣٠٠ - ٢٠٠} = ٨٠$$

$$\because (\text{ص} - \text{ص}_١) = \text{أ} (\text{س} - \text{س}_١)$$

$$(\text{ص} - ١٧٥٠٠) = ٨٠ (\text{س} - ٢٠٠)$$

$$\text{ص} - ١٧٥٠٠ = ٨٠ \text{ س} - ١٦٠٠٠$$

$$\therefore \text{ص} = ٨٠ \text{ س} + ١٥٠٠ \qquad \leftarrow \text{معادلة الخط المستقيم}$$

$\therefore$ التكلفة الثابتة = ١٥٠٠ ، التكلفة المتغيرة = ٨٠

$\therefore$ تكلفة إنتاج ٥٠٠ وحدة = ٨٠ (٥٠٠) + ١٥٠٠ = ٤١٥٠٠ جنيه

مثال (١٣) :

قدر مصنع حاسبات آلية أنه إذا تم إنتاج ١٠٠٠ جهاز سوف يتم بيع الجهاز بسعر ١٢٠٠ جنيه ، وإذا تم إنتاج ٣٠٠٠ جهاز سيكون سعر البيع ١١٠٠ جنيه للجهاز أوجد معادلة الطلب الخطية.

الحــــل

(١٠٠٠ جهاز ، ١٢٠٠ جنيه) ، (٣٠٠٠ جهاز ، ١١٠٠ جنيه)

س١ ص١ س٢ ص٢

الميل (أ) = (ص٢ − ص١) / (س٢ − س١) = (١٢٠٠ − ١١٠٠) / (٣٠٠٠ − ١٠٠٠) = − ٠,٠٥

∴ (ص − ص١) = أ (س − س١)

(ص − ١٢٠٠) = − ٠,٠٥ (س − ١٠٠٠)

ص − ١٢٠٠ = − ٠,٠٥ س + ٥٠

ص = ١٢٥٠ − ٠,٠٥ س

ملاحظات :

(١) التكلفة الكلية = تكلفة متغيرة للوحدة × عدد الوحدات + التكلفة الثابتة

ص = (أ × س) + ب

(٢) الإيراد الكلي = سعر الوحدة × عدد الوحدات (حجم الإنتاج)

= ع × س

(٣) الربح = الإيراد الكلي − التكلفة الكلية

(٤) نقطة التعادل هي النقطة التي يتساوى عندها الإيراد الكلي لمنتج معين مع التكلفة الكلية لهذا المنتج ، وبالتالي يكون الربح يساوي صفر :

الإيراد الكلي = التكلفة الكلية

أو الإيراد الكلي − التكلفة الكلية = صفر

مثال (١٤) :

إذا كانت التكلفة المتغيرة للوحدة ١٠ جنيه ، وكانت التكلفة الثابتة ٢٥٠ جنيه . فأوجد التكلفة الكلية لإنتاج ٧٥ وحدة.

الحـــل

أ = ١٠ ، ب = ٢٥٠ ، ص = ؟

∴ ص = أ س + ب

ص = ١٠ س + ٢٥٠

وعند إنتاج ٧٥ وحدة (س = ٧٥) تكون التكلفة كالتالي :

ص = ١٠ (٧٥) + ٢٥٠ = ١٠٠٠ جنيه.

مثال (١٥) :

إذا كانت التكلفة الكلية عند إنتاج ١٠٠ وحدة هي ٨٥٠ جنيه ، وكانت التكلفة الثابتة ١٥٠ جنية . فأوجد التكلفة المتغيرة للوحدة ثم أوجد التكلفة الكلية عند إنتاج ٢٠ وحدة.

الحـــل

ص = ٨٥٠ ، س = ١٠٠ ، ب = ١٥٠ ، أ = ؟

∵ ص = أ س + ب

٨٥٠ = ١٠٠ أ + ١٥٠

٨٥٠ − ١٥٠ = ١٠٠ أ

٧٠٠ = ١٠٠ أ

أ = ٧ (التكلفة المتغيرة للوحدة = ٧ جنيه)

∴ ص = ٧ س + ١٥٠

عند س = ٢٠ وحدة :

∴ ص = ٧ (٢٠) + ١٥٠ = ٢٩٠ جنيه

مثال (١٦) :

إذا كانت التكلفة المتغيرة للوحدة ١٠ جنيه ، والتكلفة الثابتة ٢٥٠٠ جنيه، وسعر بيع الوحدة ١٢ جنيه. فأوجد عدد الوحدات اللازمة لتحقيق نقطة التعادل.

الحــــل

نفرض أن عدد الوحدات = س

∵ الإيراد الكلي = سعر الوحدة × عدد الوحدات

= ١٢ × س = ١٢ س

التكلفة الكلية = التكلفة المتغيرة للوحدة × عدد الوحدات + التكلفة الثابتة

= (١٠ × س) + ٢٥٠٠

= ١٠ س + ٢٥٠٠

عند التعادل يكون :

الإيراد الكلي = التكلفة الكلية

١٢ س = ١٠ س + ٢٥٠٠

٢ س = ٢٥٠٠

س = ١٢٥٠ وحدة

أي أنه عند إنتاج ١٢٥٠ وحدة سوف يكون الربح يساوي صفر، وإذا تم إنتاج أكثر من ذلك يتحقق الأرباح وأقل من ذلك يتحقق خسارة.

مثال (١٧) :

إذا كانت معادلة التكلفة الكلية هي ٢,٨ س + ٦٠٠ ، وسعر بيع الوحدة ٤ جنيه. فأوجد حجم إنتاج التعادل.

الحـــل

الإيراد الكلي = سعر بيع الوحدة × عدد الوحدات

٤ × س = ٤ س

التكلفة الكلية = ٢,٨ س + ٦٠٠

عند إنتاج التعادل يكون :

الإيراد الكلي – التكلفة الكلية = صفر

٤ س – (٢,٨ س + ٦٠٠) = صفر

٤ س – ٢,٨ س – ٦٠٠ = صفر

١,٢ س = ٦٠٠

∴ س = ٥٠٠ وحدة

أي أنه عند إنتاج ٥٠٠ وحدة يتساوى الإيراد الكلي مع التكلفة الكلية.

مثال (١٨) :

إذا كانت التكلفة المتغيرة للوحدة في أحد المصانع ٤٠ جنيه ، والتكلفة الثابتة ١٥٠٠٠ جنيه ، وسعر بيع الوحدة ٥٠ جنيه. فأوجد :

(أ) حجم إنتاج التعادل.

(ب) حجم الإنتاج اللازم لتحقيق أرباح ٢٠٠٠ جنيه.

الحـــل

الإيراد الكلي = ٥٠ × س = ٥٠ س

التكلفة الكلية = (٤٠ × س) + ١٥٠٠٠ = ٤٠ س + ١٥٠٠٠

(أ) تحديد حجم إنتاج التعادل :

الإيراد الكلي – التكلفة الكلية = صفر

٥٠ س – (٤٠ س + ١٥٠٠٠) = صفر

٥٠ س – ٤٠ س – ١٥٠٠٠ = صفر

١٠ س = ١٥٠٠٠

س = ١٥٠٠ وحدة

(ب) تحديد حجم الإنتاج اللازم لتحقيق أرباح ٢٠٠٠ جنيه :

الإيراد الكلي – التكلفة الكلية = الربح

٥٠ س – (٤٠ س + ١٥٠٠٠) = ٢٠٠٠

٥٠ س – ٤٠ س – ١٥٠٠٠ = ٢٠٠٠

١٠ س = ١٧٠٠٠

س = ١٧٠٠ وحدة

مثال (١٩) :

إذا كان سعر بيع الوحدة لسلعة ما ٢٠ جنيه ، والتكلفة المتغيرة للوحدة ١٢,٥ جنيه ، والتكلفة الثابتة ٧٠٠٠ جنيه. فأوجد عدد الوحدات اللازم لتحقيق ربح قدره ٥٠٠٠ جنيه.

الحـــــل

الإيراد الكلي = ٢٠ × س = ٢٠ س

التكلفة الكلية = ١٢,٥ س + ٧٠٠٠

الإيراد الكلي – التكلفة الكلية = الربح

٢٠ س – (١٢,٥ س + ٧٠٠٠) = ٥٠٠٠

٢٠ س – ١٢,٥ س – ٧٠٠٠ = ٥٠٠٠

٧,٥ س = ١٢٠٠٠

ص = ١٦٠٠ وحدة.

مثال (٢٠) :

إذا كان سعر بيع الوحدة يتحدد بالمعادلة (٢ – س) ، والتكلفة الكلية تتحدد بالمعادلة (٠,٢٥ + ٠,٥ س). فأوجد عدد الوحدات والسعر اللازمين لتحقيق ربح ٠,٢٥ ؟

الحـــل

الإيراد الكلي = سعر بيع الوحدة × عدد الوحدات

= (٢ – س) × س = ٢ س – س^{٢}

التكلفة الكلية = ٠,٢٥ + ٠,٥ س

∴ الإيراد الكلي – التكلفة الكلية = الربح

(٢ س – س^{٢}) – (٠,٢٥ + ٠,٥ س) = ٠,٢٥

٢ س – س^{٢} – ٠,٢٥ – ٠,٥ س = ٠,٢٥

١,٥ س – س^{٢} – ٠,٢٥ – ٠,٢٥ = صفر

١,٥ س – س^{٢} – ٠,٥ = صفر

س^{٢} – ١,٥ س + ٠,٥ = صفر [بالضرب × (– ١)]

∴ أ = ١ ، ب = – ١,٥ ، ج = ٠,٥

$$\therefore \text{س} = \frac{-\text{ب} \pm \sqrt{\text{ب}^{\text{٢}} - \text{٤أجـ}}}{\text{٢أ}}$$

$$\therefore \text{س} = \frac{-(-\text{١,٥}) \pm \sqrt{(-\text{١,٥})^{\text{٢}} - \text{٤}\ (\text{١})\ (\text{٠,٥})}}{\text{٢} \times \text{١}}$$

$$\therefore \text{س} = \frac{\text{١,٥} \pm \text{٠,٥}}{\text{٢}}$$

أما أن

$$س = \frac{١,٥ - ٠,٥}{٢} \quad \text{أو} \quad س = \frac{١,٥ + ٠,٥}{٢}$$

س = ٠,٥	س = ١
إيجاد السعر :	إيجاد السعر :
السعر = ٢ – س	السعر = ٢ – س
= ٢ – ٠,٥ = ١,٥	= ٢ – ١ = ١

توازن السوق :

يتحقق توازن السوق عندما تتساوى الكمية المطلوبة من سلعة ما مع الكمية المعروضة منها (الطلب = العرض) ، وعند ذلك يمكن تحديد كل من السعر التوازني (س) وكمية التوازن (ص).

مثال (٢١) :

أوجد سعر وكمية التوازن لسلعة ما إذا كانت الكمية المطلوبة منها تتحدد بالمعادلة ص = – ٣ س + ٥٠ والكمية المعروضة لنفس السلعة تتحدد بالمعادلة ص = ٢ س + ٣٠.

الحـــل

عند التوازن :

الطلب = العرض

$-$ ٣ س + ٥٠ = ٢ س + ٣٠

٥٠ $-$ ٣٠ = ٢ س + ٣ س

٥ س = ٢٠

س = ٤ (سعر التوازن)

بالتعويض في معادلة الطلب مثلاً :

ص = $-$ ٣ س + ٥٠

ص = $-$ ٣ (٤) + ٥٠ = ٣٨ (كمية التوازن)

مثال (٢٢) :

إذا كانت معادلة الطلب هي : ٣ س + ٢ ص = ٥٢

وكانت معادلة العرض هي : ١٠ س + ٥ ص = ١٦٠

فأوجد سعر وكمية التوازن

الحـــل

معادلة الطلب : ٣ س + ٢ ص = ٥٢

∴ ٢ ص = ٥٢ $-$ ٣ س

∴ ص = ٢٦ $-$ ١,٥ س

معادلة العرض : ١٠ س + ٥ ص = ١٦٠

٥ ص = ١٦٠ $-$ ١٠ س

ص = ٣٢ $-$ ٢ س

عند التوازن :

الطلب	=	العرض
٢٦ – ١,٥ س	=	٣٢ – ٢ س
٢ س – ١,٥ س	=	٣٢ – ٢٦
٠,٥ س	=	٦
س	=	١٢ (سعر التوازن)

وبالتعويض في معادلة العرض مثلاً :

ص = ٣٢ – ٢ س

ص = ٣٢ – ٢ (١٢) = ٨ (كمية التوازن)

مثال (٢٣) :

بافتراض أن الكمية المطلوبة (ط) من سلعة ما تتحدد بالمعادلة الآتية :

ط = ٥٤ – ٢ س^{٢} ، وأن الكمية المعروضة (ع) من نفس السلعة تتحدد بالمعادلة الآتية : ع = ١٢ س حيث :

(س) سعر بيع الوحدة. فأوجد السعر والكمية عند التوازن في السوق.

الحـــل

عند التوازن :

الطلب	=	العرض
٥٤ – ٢ س^{٢}	=	١٢ س
٢ س^{٢} + ١٢ س – ٥٤	=	صفر
س^{٢} + ٦ س – ٢٧	=	صفر (بالقسمة على٢)

∴ (س − ٣) (س + ٩) = صفر

أما أن

س − ٣ = صفر
س = ٣

س + ٩ = صفر
س = − ٩ (مرفوض)

∴ السعر عند توازن السوق (س) = ٣

وبالتعويض في معادلة العرض :

ع = ١٢ س = ١٢ (٣) = ٣٦ (كمية التوازن)

مثال (٢٤) :

إذا كانت دالة التكاليف الكلية في إحدى شركات الدراجات كالتالي :

ص = ١٠٠ س^{٢} + ١٥٠٠ س + ٢٥٠٠ ، حيث س تمثل عدد الدراجات المنتجة يومياً ، وكان سعر بيع الدراجة هو ٢٥٠٠ جنيه. فأوجد حجم الإنتاج اللازم لتحقيق نقطة التعادل.

الحـــل

الإيراد الكلي = سعر بيع الوحدة × عدد الوحدات

= ٢٥٠٠ س

التكلفة الكلية (ص) = ١٠٠ س^{٢} + ١٥٠٠ س + ٢٥٠٠.

عند إنتاج التعادل يكون :

الإيراد الكلي = التكلفة الكلية

٢٥٠٠ س = ١٠٠ س^{٢} + ١٥٠٠ س + ٢٥٠٠

∴ ١٠٠ س^{٢} + ١٥٠٠ س + ٢٥٠٠ − ٢٥٠٠ س = صفر

١٠٠ س^{٢} − ١٠٠٠ س + ٢٥٠٠ = صفر

س^{٢} − ١٠ س + ٢٥ = صفر (بالقسمة على ١٠٠)

(س − ٥)^{٢} = صفر

∴ س = ٥

أي أن حجم الإنتاج اللازم لتحقيق التعادل هو ٥ دراجات.

تمـــارين

(١) أوجد فئتي النطاق والمدى للدوال التالية :

(١) د (س) = ٥ س – ٣   (٢) د (س) = ١٠ س + ٥

(٣) د (س) = – ٣ س + ٩   (٤) د (س) = – ٢ س^{٣} + ٧ س

(٥) د (س) = س^{٣} (٦) د (س) = ٤٠ – $\frac{س^{٢}}{٢}$

(٢) أوجد فئة النطاق لكل من الدوال التالية :

(١) د (س) = ٥٠   (٢) د (س) = – ٢٠

(٣) د (س) = ١٠ س – ٥   (٤) د (س) = – س + ١٢

(٥) د (س) = ٤٩ – س^{٢} (٦) د (س) = س^{٢} – ٢٥

(٧) د (س) = $\sqrt{س + ١٠}$ (٨) د (س) = $\sqrt{- ٣س + ٨١}$

(٩) د (س) = $\sqrt{- س - ٩}$ (١٠) د (س) = $\sqrt{٨١ - س^{٢}}$

(٣) إذا كانت دالة التكلفة الكلية بالجنيه لإنتاج س وحدة من سلعة ما هي :

د (س) = ٢٠ س + ١٥٠٠٠ ، وكان الحد الأقصى لعدد الوحدات التي يمكن إنتاجها هو ٤٠٠٠٠ وحدة. فأوجد نطاق ومدى هذه الدالة.

(٤) في أحد المصانع كانت التكلفة الثابتة لأحد المنتجات هي ١٢٠٠٠٠ جنيه سنوياً ، بالإضافة إلى ١٠ جنيهات تكلفة متغيرة لكل وحدة منتجة. فإذا كانت س تمثل عدد الوحدات المنتجة سنوياً. فالمطلوب :

(أ) دالة التكلفة السنوية د (س)

(ب) احسب د (٢٥٠٠٠) ، د (٥٠٠٠٠).

(ج) إذا كان الحد الأقصى لعدد الوحدات المنتجة سنوياً هو ١٨٠٠٠٠ وحدة. فأوجد نطاق ومدى دالة التكلفة الكلية السنوية.

(٥) يتقاضى أحد العمال أجراً شهرياً أساسياً ٣٦٠٠ جنيه بالإضافة إلى عمولة ٢٥ جنيه عن كل وحدة (س) يبيعها من المنتج الذي تبيعه الشركة شهرياً ، والمطلوب :

(أ) أوجد الأجر الإجمالي الشهري الذي يحصل عليه العامل كدالة في س.

(ب) احسب إجمالي الأجر الشهري الذي يحصل عليه العامل إذا باع ٢٠ وحدة من المنتج في أحد الشهور

(٦) أوجد معادلة الخط المستقيم الذي يحقق الشروط التالية :

(١) ميله يساوي ٥ ويقطع محور الصادات في ٢.

(٢) ميله يساوي – ٣ ويقطع محور الصادات في – ٥.

(٣) ميله يساوي ٤ ويقطع محور الصادات عند نقطة الأصل.

(٤) يقطع محور الصادات في – ٥ وميله يساوي – ٣.

(٧) أوجد الميل والمقطع للعلاقات الخطية التالية :

(١) ص = ٣ س – ٥

(٢) ص = – ٧ – ٢ س

(٣) ٣ س – ٢ ص – ٦ = صفر

(٤) ٥ ص + ١٥ س + ٢٥ = صفر

(٥) ٢ ص – ١٨ س – ١٠ = صفر

(٦) $\frac{\text{س}}{٣} + \frac{\text{ص}}{٣} = ١$

(٨) أوجد معادلة الخط المستقيم الذي يمر بالنقاط التالية :

(١) (١ ، – ٣) ، (٣ ، ٧)   (٢) (٢ ، – ١) ، (٤ ، – ١)

(٣) (١٠ ، ٢) ، (١٢ ، ١٠)   (٤) نقطة الأصل ، (٣ ، ٦)

(٥) (٤ ، – ٥) ، (٦ ، ٣)   (٦) (٤ ، ٥) ، نقطة الأصل

(٩) مصنع آلات كاتبة ينتج كالتالي :

١٠ آلات كاتبة في اليوم بتكلفة كلية ٣٥٠٠ جنيه أو

٢٠ آلة كاتبة في اليوم بتكلفة كلية ٦٠٠٠ جنيه.

أوجد معادلة التكلفة الكلية للإنتاج ، ثم حدد كل من التكلفة الثابتة والتكلفة المتغيرة للوحدة ، ثم احسب التكلفة الكلية لإنتاج ٣٠ آلة كاتبة في اليوم.

(١٠) إذا كانت تكلفة إنتاج ١٠ وحدات في اليوم هي ٣٥٠ جنيه، وتكلفة إنتاج ٢٠ وحدة في اليوم هي ٦٠٠ جنيه. فأوجد معادلة الخط المستقيم التي تمثل التكلفة الكلية.

(١١) إذا كانت التكلفة الثابتة لمنتج معين ٨٠٠ جنيه في الأسبوع ، وكانت التكلفة الكلية لإنتاج ٣٠ وحدة في الأسبوع هي ١١٠٠ جنيه. باستخدام النموذج الخطي للتكلفة أوجد التكلفة المتغيرة للوحدة.

(١٢) إذا كانت تكلفة إنتاج ١٠٠ وحدة في إحدى الشركات شهرياً هي ١٧٠٠ جنيه ، في حين أن تكلفة إنتاج ٢٠٠ وحدة شهرياً هي ٢٢٠٠ جنيه. فأوجد معادلة الخط المستقيم ، ثم أوجد التكلفة الثابتة الشهرية وكذلك تكلفة إنتاج ٤٠٠ وحدة شهرياً.

(١٣) إذا كان لديك معادلات الطلب والعرض التالية فأوجد سعر وكمية التوازن للسلعة في السوق :

(أ) معادلة الطلب : ٣ ص + ٥ س = ٢٢

معادلة العرض : ٢ ص – ٣ س = ٢

(ب) معادلة الطلب : ٣ ص – ٦ س = ٩

معادلة العرض : ٢ ص – ٣ س = ٨

(ج) معادلة الطلب : ٢ س – ص = ٤

معادلة العرض : س + ص = ٥

(د) معادلة الطلب : ص = – ٦ س + ١٠٠

معادلة العرض : ص = ٤ س – ٥٠

(هـ) معادلة الطلب : ٢ ص + ٣ س = ١٠٠

معادلة العرض : ص = ٠,١ س + ٢

(١٤) بافتراض أن الكمية المطلوبة (ط) تتحدد بالعلاقة ط = ٢٠ – س^{٢} + ١٦ س وأن الكمية المعروضة (ع) تتحدد بالعلاقة ع = ٨ س ، حيث س تمثل سعر الوحدة. فأوجد الكمية والسعر عند توازن السوق

(١٥) بافتراض أن التكلفة الثابتة الشهرية لأحد الشركات هي ٣٥٠٠٠ جنيهاً ، وأن التكلفة المتغيرة للوحدة الواحدة هي ٣٠ جنيه ، وأن سعر بيع الوحدة من هذه السلعة هو ٨٠ جنيه. فأوجد حجم إنتاج التعادل.

(١٦) إذا كانت التكلفة المتغيرة للوحدة ٠,٩ جنيه، والتكلفة الثابتة ٢٤٠ جنيه، وسعر بيع الوحدة ١,٢ جنيه. فأوجد عدد الوحدات اللازم لتحقيق نقطة التعادل.

(١٧) إذا كانت التكلفة الكلية تتحدد بالمعادلة ص = ٥٠ س + ٤٤٠٠ ، وسعر بيع الوحدة ٧٠ جنيه ، المطلوب :

(١) عدد الوحدات اللازم لتحقيق التعادل.

(٢) عدد الوحدات اللازم لتحقيق ربح قدره ٤٠٠٠ جنيه.

(٣) عدد الوحدات الذي يتحقق معه خسارة قدرها ١٢٠٠ جنيه.

(١٨) إذا كانت التكاليف الثابتة الشهرية لمصنع ما هي ٥٥٥٠ جنيه ، وتكلفة إنتاج الوحدة الواحدة هي ١٠٠ جنيه ، فإذا كان سعر بيع الوحدة (ع) يتوقف على عدد الوحدات المنتجة والمباعة (س) بالمعادلة ع = ٥٠٠ – ٢س فأوجد:

(أ) معادلة : الإيراد الكلي ، التكلفة الكلية ، الربح.

(ب) حجم إنتاج التعادل.

(ج) إذا قام المصنع بإنتاج وبيع ١٠٠ وحدة ، فحدد مقدار الأرباح أو الخسائر ، ثم حدد سعر بيع الوحدة.

الباب الثالث

المتباينـات والبرمجــة الخطيـــة

يُعد أسلوب البرمجة الخطية من أكثر الأساليب الرياضية استخداماً فى مجال اتخاذ القرارات التى تستهدف الاستخدام الأمثل للموارد المتاحة Available Resources لتحقيق الأهداف المطلوبة، حيث تأتى أهمية هذا الأسلوب من الندرة التى تتصف بها الموارد المختلفة والتى تشمل كلاً من رأس المال والقوى العاملة والمواد الأولية والمعدات والإدارة. وتعتبر المشكلة الأساسية فى معظم المنظمات هى كيفية استخدام الموارد أو الطاقة المتاحة المحدودة من خلال أفضل الطرق العلمية وأدقها للوصول إلى أعلى تعظيم للربح Profit Maximization أو أدنى تخفيض للتكلفة Cost Minimization.

الجوانب الأساسية لمشكلة البرمجة الخطية:

إن المشكلة الأساسية التى يتم حلها باستخدام أسلوب البرمجة الخطية هى الوصول إلى التوزيع الأمثل للموارد المتاحة على الاستخدامات المختلفة، لذا فإن الجوانب الأساسية لهذه المشكلة تتمثل فيما يلى:

(١) التوزيع الأمثل للموارد:

يهدف أسلوب البرمجة الخطية إلى استغلال الموارد المتاحة بطريقة معينة تحقق أكبر ربح ممكن أو أقل تكلفة ممكنة، ويتم ترجمة الهدف إلى ما يسمى بدالة الهدف Objective Function والذى يعمل من خلال مجموعة من الخطوات الرياضية على الوصول إلى أفضل البدائل التى تضمن تحقيق المستوى الأمثل لدالة الهدف.

(٢) محدودية الموارد:

يواجه متخذ القرار فى العديد من المنظمات مشكلة محدودية الموارد (أموال، أفراد، مواد أولية ، ....)، ولذلك تسعى هذه المنظمات إلى تحقيق أهداف معينة فى حدود مواردها المتاحة. ويقصد بخاصية المحدودية وجود حد أقصى من الكميات المتاحة من الموارد خلال فترة زمنية معينة، فهناك ميزانية مالية، طاقة للألات، عدد من العاملين وغير ذلك ما يمثل قيود Constraints على قدرة متخذ القرار فى الوصول لحل ما، فهى بمثابة محددات يحاول الوصول إلى أفضل النتائج من خلالها.

(٣) بدائل الاستخدامات:

يتطلب اتخاذ القرار وجود عدة بدائل حتى يتم اختيار أفضلها، ولذلك فإن جوهر مشكلة البرمجة الخطية هو وجود بدائل للاستخدامات. فإذا كان لدى إحدى المنظمات مثلاً كمية من الأخشاب فأمامها الخيار فى استخدامها فى إنتاج الكراسى أو الأبواب، وإذا كان لديها كمية من السكر فأمامها الخيار فى استخدامها فى إنتاج العصائر أو المربات. وبالتالى فإنه فى حالة عدم وجود بدائل للاستخدامات فلا يمكن استخدام أسلوب البرمجة الخطية، أى أن وجود عدة بدائل يعتبر شرط من شروط تطبيق هذا الأسلوب.

يمتاز نموذج البرمجة الخطية الذى يعبر عن التمثيل أو الشكل الرياضى للمشاكل الاقتصادية بخصائص محددة، ومعرفة هذه الخصائص يمكننا من تحديد فيما إذا كان بالإمكان حل هذه المشاكل باستخدام البرمجة الخطية أم لا. بعبارة أخرى فإن حل المشاكل بأسلوب البرمجة الخطية لا يمكن أن يتم إلا بتوفر بعض المتطلبات لكى يتم صياغتها بأسلوب البرمجة الخطية، ويمكن تصنيف هذه الخصائص إلى فئتين هما المكونات والافتراضات على أن تتضمنها جميع مسائل

البرامج الخطية سواء كانت فى حالة التعظيم Maximization أو فى حالة التخفيض Minimization.

مكونات نموذج البرمجة الخطية:

Components of Linear Programming Model

حيث أن النموذج هو الصياغة الرياضية للمتغيرات أو العناصر السائدة للمشكلة والتى تسمى فى نموذج البرمجة الخطية بالمتغيرات القرارية Decision Variables أى المتغيرات المطلوب اتخاذ قرار بشأنها أى تحديد قيمها والمتغيرات التحكمية (المعلمات). كذلك يتكون من العلاقات بين هذه المتغيرات وتسمى فى نموذج البرمجة الخطية بالقيود الهيكلية. ويتميز نموذج البرمجة الخطية بأن القيود الهيكلية قيود خطية أيضاً وكذلك دالة الهدف الخاصة به تكون خطية فى المتغيرات القرارية.

ومما سبق يمكن تحديد أربعة مكونات لنموذج البرمجة الخطية على النحو التالى:

(١) **دالة الهدف الخطية:** أى صياغة الهدف كدالة خطية فى المتغيرات القرارية، ولابد أن يكون للمشكلة المراد صياغتها بإسلوب البرمجة الخطية هدف واحد. وهناك نوعان من الأهداف للمشاكل المراد حلها بهذا الأسلوب هى:

(أ) **التعظيم** : وهو هدف يعبر عن الأرباح، العوائد، الكفاءة، أو معدل العائد، ..... ألخ.

(ب) **التخفيض** : وهو هدف يعبر عن التكلفة، الوقت، المسافة، ...... ألخ.

ويعبر عن ربح الوحدة الواحدة أو تكلفتها للمدخلات (Inputs) أو للمخرجات (Output) بدالة الهدف (Objective Function)، ويجب أن تكون هذه الدالة عبارة عن معادلة رياضية كالآتى:

تعظيم د(س) = $أ_1$ س$_1$ + $أ_2$ س$_2$ + ... + $أ_ن$ س$_ن$

أو

تخفيض د (س) = $أ_1$ س$_1$ + $أ_2$ س$_2$ + ... + $أ_ن$ س$_ن$

(٢) **بدائل القرار** : وهى مجموعة الطرق البديلة المتاحة لتحقيق الهدف بدرجة تفضيل نسبية، مما يستوجب اختيار إحداها والتى تحقق الحل الأمثل، ولا دخل لمتخذ القرار فى تحديد تأثير هذه البدائل على المشكلة ولكنها تعطى كمعطيات.

(٣) **القيود** : وهى مجموعة المحددات التى تحد من درجة تحقيق الأهداف، لأن عملية تحقيق الهدف تشترط الاستجابة لهذه المتطلبات بشكل جماعى. وتكون فى شكل متباينات خطية أو معادلات خطية فى المتغيرات القرارية.

وهناك ثلاثة أنواع من القيود:

(أ) القيد أصغر أو يساوى ($\le$) : وهو يتضمن حداً أعلى مثل:

٢س$_1$ + ٥ س$_2$ $\le$ ٢٠

(ب) القيد أكبر أو يساوى ($\ge$): وهو يعنى استخدام ما يساوى الموارد القابلة للاستخدام أو أكبر منها، أو بعبارة أخرى هو الحد الأدنى الواجب تحقيقه فى الحل النهائى مثل:

٥س$_1$ + ١٠س$_2$ $\ge$ ٣٠

(ج) قيد المساواة (=) : والذى يستوجب التحديد بدقة لكمية الموارد المتاحة للاستخدام مثل:

٣س$_1$ + ٦س$_2$ = ١٥

ويمكن أن تتضمن مشكلة البرمجة الخطية عدداً غير محدود من القيود، وهذه القيود إما أن تكون من نوع واحد، أى أن جميعها تحمل علامة المتباينة $\geq$ أو $\leq$ أو = ، أو هى عبارة عن مزيج من المعادلات والمتباينات، وهذا المزيج الذى يحدد توليفة أو تركيبة متغيرات القرار فى أى مشكلة برمجة خطية هو ما يُعبر عنه بمجال الحل الممكن (Feasible solution space). وقد تم تصميم أسلوب البرمجة الخطية للبحث عن مجال الحل الممكن لتركيبة متغيرات القرار والتى يمكن أن تحقق الأمثلية (Optimality) تبعاً لدالة الهدف.

(٤) **متغيرات القرار غير السالبة** : تتضمن نماذج البرمجة الخطية نوعين من الدوال، الأولى هى دالة الهدف المراد تحقيقه، والثانية هى دوال القيود والتى يعبر عنها بصيغ رياضية تمثلها رموز مثل $س_١$، $س_٢$ كمتغيرات للقرار وأرقام تُدعى المعاملات (Parameters) والتى هى عبارة عن قيم محددة تمثل نتائج حل النموذج، وتصف متغيرات القرار القرارات التى يجب اتخاذها. ويجب أن تكون جميع هذه المتغيرات موجبة أى أن:

$$س_١، س_٢، \ldots\ldots\ldots\ldots س_ن \geq صفر$$

وتسمى هذه القيود على المتغيرات بقيود الإشارة.

افتراضات نموذج البرمجة الخطية:

Assumptions of Linear Programming

(١) **التناسبية (Proportionality)** : وتقوم هذه الفرضية على أساس أن مساهمة كل متغير فى دالة الهدف (أو استخدامه للموارد) يتناسب طردياً مع قيمته (مستواه). وكذلك فإن مساهمة دالة الهدف لأى متغير يكون مستقل عن قيم متغيرات القرار الأخرى.

(٢) القيم الكسرية (Divisibility):

يتطلب هذا الافتراض أن يُسمح لكل متغير قرار بأن يأخذ قيم كسرية، وتقوم هذه الفرضية على أساس أن وحدات الانتاج يمكن تقسيمها إلى أى مستوى أو قيم كسرية (Fractional) ، وأن القيم غير الصحيحة لمتغيرات القرار يمكن قبولها. كما يمكن تقريب كل متغير فى الحل الأمثل للبرمجة الخطية للحصول على قيم صحيحة. حيث يمكن أن يؤدى ذلك أيضاً إلى حل معقول.

(٣) التأكد (Certainty):

ينبغى أن تكون قيم المعايير فى نموذج البرمجة الخطية معروفة وثابتة، بمعنى أن تكون جميع قيم معالم النموذج (معاملات دالة الهدف والقيود) معلومة بالتأكيد.

(٤) الإضافة (Additivity):

ويعنى هذا الفرض أن دالة الهدف تتكون من مجموع المساهمات الفردية للمتغيرات التى تمت إضافتها، كما أن الطرف الأيسر من أى قيد هو عبارة عن مجموع المساهمات من كل متغير.

(٥) الخطية (Linearity):

بمعنى أن يتم التعبير عن دالة الهدف ومعادلات أو متباينات القيود بعلاقات خطية، وهذه الخاصية تؤدى ضمنياً إلى تحقيق مبدأ التناسبية والإضافة.

بناء نموذج البرمجة الخطية:

إن بناء النموذج يتوقف على عملية فهم شامل لعناصر نموذج البرمجة الخطية، حيث أن هذه العملية تساعد متخذ القرار على جمع المعلومات حول

المشكلة فى النموذج الرياضى. ولغرض فهم آلية بناء النموذج نورد المثال الآتى والذى يوضح الخطوات المتبعة لعملية البناء.

مثال (١):

تم بناء مصنع لإنتاج نوعين من الملابس الرجالى والأطفال، وكان المتوفر من القماش ٩٠٠ متر كما أن عدد ساعات العمل المتاحة ٤٢٠ ساعة. فيما تحتاج كل قطعة من الملابس الرجالى إلى ٣ متر من القماش و ٤ ساعات عمل، بينما تحتاج كل قطعة من ملابس الأطفال إلى ١,٥ متر من القماش وإلى ٣ ساعات عمل.

المطلوب: صياغة نموذج البرمجة الخطية إذا كان هدف المصنع تعظيم الأرباح، حيث وجد أن ربح القطعة الواحدة من الملابس الرجالى ٥ جنيهات، وربح القطعة الواحدة من ملابس الأطفال ٣,٥ جنيه.

الحـــل

لصياغة نموذج البرمجة الخطية سيتم اتباع الخطوات التالية:

(١) تحديد المتغيرات، حيث نفترض أن:

$$\left.\begin{array}{l} \text{س}_1 = \text{عدد القطع الرجالى} \\ \text{س}_2 = \text{عدد قطع الأطفال} \end{array}\right\} \text{متغيرات القرار}$$

(٢) تحديد دالة الهدف:

$$\text{تعظيم د (س)} = ٥\text{س}_1 + ٣,٥\ \text{س}_2$$

(٣) تحديد القيود :

$$٣\text{س}_1 + ١,٥\ \text{س}_2 \leq ٩٠٠ \qquad \text{قيد الأقمشة}$$

$٤س_١ + ٣س_٢ \le ٤٢٠$ قيد ساعات العمل

(٤) تحديد قيد عدم السلبية:

$س_١ ، س_٢ \ge$ صــــفر

وبذلك فإن الصيغة النهائية لمشكلة البرمجة الخطية تكون كمايلى:

تعظيم: $د(س) = ٥س_١ + ٣,٥س_٢$

بشرط:

$٣س_١ + ١,٥س \le ٩٠٠$

$٤س_١ + ٣س_٢ \le ٤٢٠$

$س_١ ، س_٢ \ge$ صفـــر

الصيغة العامة للبرمجة الخطية:

حيث أن البرمجة الخطية هى أحد الأساليب الرياضية لحل مشكلة القرار، فإنه يمكن التعبير عنها بصيغة رياضية كمايلى:

دالة الهدف :

تعظيم أو تخفيض $ص = أ_١س_١ + أ_٢س_٢ + \ldots\ldots + أ_نس_ن$

بشرط:

$ب_{١١}س_١ + ب_{٢١}س_٢ + \ldots\ldots + ب_{ن١}س_ن \;\; \le ، = ، \ge \;\; جـ_١$

$ب_{١٢}س_١ + ب_{٢٢}س_٢ + \ldots\ldots + ب_{ن٢}س_ن \;\; \le ، = ، \ge \;\; جـ_٢$

$ب_{١م}س_١ + ب_{٢م}س_٢ + \ldots\ldots + ب_{نم}س_ن \;\; \le ، = ، \ge \;\; جـ_م$

$س_١ ، س_٢ ، \ldots\ldots ، س_ن \ge$ صفر

ويمكن إعادة كتابة الصيغة السابقة بإسلوب رياضى آخر وهو الجبر الخطى كالتالى:

تعظيم أو تخفيض ص = [أ١ أ٢ ......أن]

$$\begin{pmatrix} \text{س}_1 \\ \text{س}_2 \\ \vdots \\ \text{س}_\text{ن} \end{pmatrix}$$

بشرط :

$$\begin{pmatrix} \text{ب}_{11} & \text{ب}_{21} & \cdots & \text{ب}_{1\text{ن}} \\ \text{ب}_{12} & \text{ب}_{22} & \cdots & \text{ب}_{2\text{ن}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \text{ب}_{\text{م}1} & \text{ب}_{\text{م}2} & \cdots & \text{ب}_{\text{م ن}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{س}_1 \\ \text{س}_2 \\ \vdots \\ \text{س}_\text{ن} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \geq \\ = \\ \leq \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{ج}_1 \\ \text{ج}_2 \\ \vdots \\ \text{ج}_\text{م} \end{pmatrix}$$

وكذلك س $\geq$ صفر

ويمكن حل الصيغ الرياضية أعلاه لمشكلة القرار بعدة طرق منها الطريقة البيانية (طريقة الرسم البيانى)، وطريقة السمبلكس، والبرمجيات الجاهزة.

الحل البيانى لنموذج البرمجة الخطية:

تُعد طريقة الرسم البيانى وسيلة أولية ومفيدة لحل مشاكل البرمجة الخطية التى تحتوى على متغيرين فقط (س١، س٢)، حيث تقوم هذه الطريقة على فكرة تمثيل دالة الهدف والقيود بمعادلة الخط المستقيم على المحورين (س١ ، س٢) لتحديد منطقة الحل الممكن Feasible Solution Region .

مثال (٢) :

إذا كان المطلوب الوصول إلى الحل الأمثل لتعظيم الأرباح:

تعظيم : ص= ٦س$_{١}$ + ٤ س$_{٢}$

بشرط :

٢س$_{١}$ + ٤س$_{٢}$ $\geq$ ٢٠

٥س$_{١}$ + ٣س$_{٢}$ $\geq$ ٣٠

س$_{١}$ ، س$_{٢}$ $\geq$ صـــفر

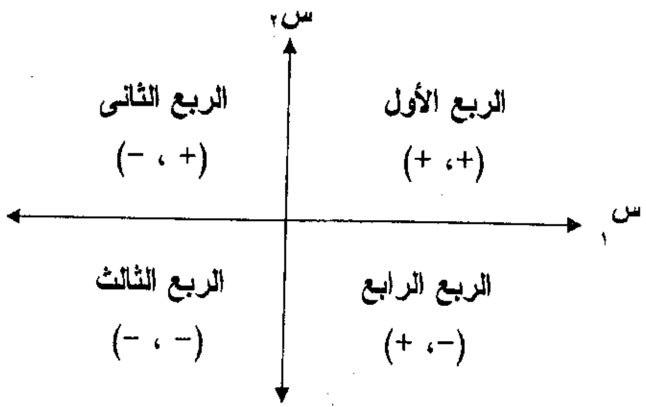
الحـــــل

*** رسم الشكل البيانى:**

(أ) نجعل المتغير س$_{١}$ على المحور الأفقى والمتغير س$_{٢}$ على المحور الرأسى.

(ب) تحديد مناطق التمثيل البيانى الأربعة كما فى الشكل (١) :

الشكل (١): التمثيل البيانى



وحيث أن من متطلبات نموذج البرمجة الخطية شرط عدم السلبية فإنه سيتم الاعتماد على الربع الأول من مناطق التمثيل البيانى الأربعة لتحقيق هذا المطلب.

وتكون خطوات الحل كالتالى:

(١) **تمثيل القيود بيانياً**: لايجاد الحل الأمثل لمشكلة البرمجة الخطية يجب أن نحدد أولاً مجموعة أو منطقة الحلول الممكنة. إن الخطوة الأولى للقيام بذلك هى أن نرسم كل قيد من قيود المشكلة على الرسم البيانى، وأن قيود عدم السلبية تعنى بأننا نعمل دائماً فى الربع الأول من مناطق التمثيل البيانى الأربعة. ويتم اتباع الخطوات التالية فى رسم القيود:

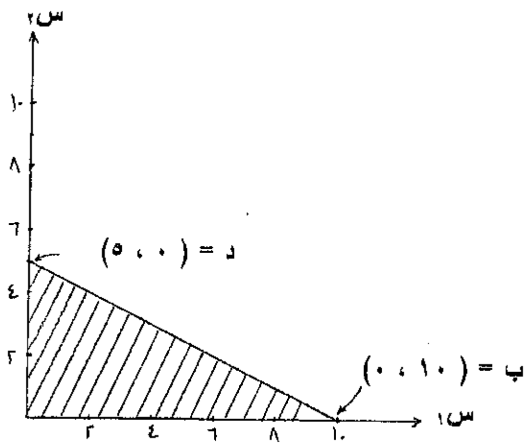
- تحويل المتباينات إلى معادلات، وأن عملية التحويل هذه تجعل القيد فى صيغة معادلة خطية يمكن تمثيلها بخط مستقيم.
- رسم القيد الأول : ٢س$_{١}$ + ٤ س$_{٢}$ = ٢٠

بافتراض إنتاج منتج واحد فقط س$_{٢}$، أى أن س$_{١}$ = صفر (عدم إنتاج س$_{١}$)، فإن قيمة س$_{٢}$ يمكن الحصول عليها كما يلى:

٢ (٠) + ٤ (س$_{٢}$) = ٢٠ ، وبالتالى تكون س$_{٢}$ = ٥

وبذلك يكون لدينا نقطة إحداثياتها هى (س$_{١}$ ، س$_{٢}$) = (١٠، ٠)، والتى يمكن تمثيلها بيانياً على الرسم البيانى السابق وسنرمز لها بـ (ب). وبذلك فإن القيد الأول يقطع المحور الرأسى عند النقطة (د) والمحور الأفقى عند النقطة (ب). ويبين الشكل (٢) رسم القيد الأول.

الشكل (٢) : رسم القيد الأول (٢س١ + ٤ س٢ ≥ ٢٠)



ويمكن رسم معادلة القيد الثانى بنفس الطريقة السابقة كمايلى:

٥ س١ + ٣ س٢ = ٣٠

نفرض أن س١ = ٠ وبذلك يكون لدينا :

٥ (٠) + ٣ س٢ = ٣٠   فتكون س٢ = ١٠

أى سنحصل على النقطة (س١ ، س٢) = (٠ ، ١٠) ونرمز لها بـــ ر .

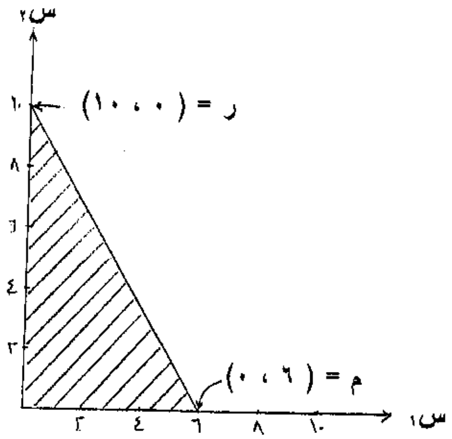
وفى حالة س٢ = ٠ يكون :

٥ س١ + ٣ (٠) = ٣٠   فتكون س١ = ٦

أى سنحصل على النقطة (س١، س٢) = (٦ ، ٠) ونسميها م .

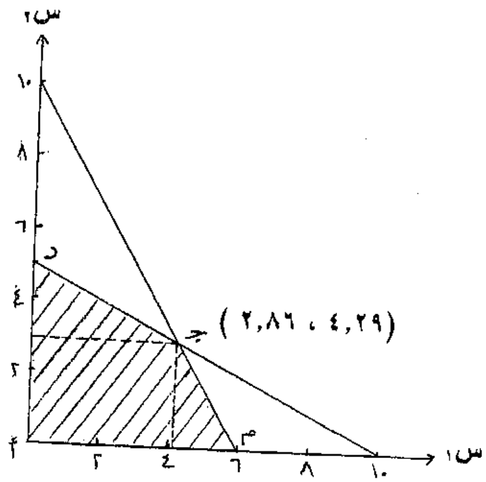
وبذلك يمكن تمثيل هذا القيد على الرسم البيانى كما فى الشكل (٣).

الشكل (٣): رسم القيد الثانى (٥ س$_1$ + ٣ س$_2$ $\geq$ ٣٠)



ويتضمن الشكل (٤) رسم القيدين السابقين معاً حيث يتضح منه منطقة الحلــول الممكنة (المنطقة المظللة).

الشكل (٤): رسم القيدين معاً



(٢) **تحديد منطقة الحل الممكن:** إن منطقة الحل الممكن لمشكلة البرمجة الخطية يجب أن تمثل المنطقة التى تقع ضمنها جميع النقاط التى تستجيب لشروط القيود جميعاً فى آن واحد Simultaneously كما فى شكل (٤). ولكون علاقات القيود من النوع ≥، فإن منطقة الحل الممكن يجب أن يكون تحديدها من اليمين وباتجاه نقطة الأصل. وقد اكتشف Dantzig أن منطقة الحل الممكن عبارة عن مضلع محدب وأن الحل الأمثل يقع على أحد نقاط الزوايا المحصورة بين نقطة الأصل وجميع نقاط المضلع التى تمثل منطقة تشارك فيها جميع القيود. إن أى نقطة من نقاط هذه المنطقة تمثل الحل الممكن ولكن ليس حلاً أمثلاً. ولغرض إيجاد النقطة التى تمثل عدد وحدات إنتاج س١، س٢ بما يحقق المستوى الأمثل (أعلى عائد) فهذا ما سنتناوله فى الفقرة التالية.

وفى هذه الحالة فإن منطقة الحلول الممكنة تحدد بالمنطقة أم جـ د، وذلك لأن هذه النقاط تقع على الحدود الخارجية للمنطقة المشتركة بين القيدين (المنطقة المظللة).

(٣) **إيجاد الحل الأمثل:** تساعد منطقة الحلول الممكنة بيانياً على إيجاد الحل الأمثل للمشكلة. حيث تقع نقطة الحل الأمثل فى منطقة الحلول الممكنة التى تحقق أقصى إنتاج ممكن وبالتالى أقصى ربح. تحتوى منطقة الحلول الممكنة على الكثير من النقاط، ولكن يبقى السؤال هو كيف يتم اختيار النقطة التى تحقق أقصى ربح ممكن؟ وهناك عدة مداخل يمكن أن تستخدم لإيجاد الحل الأمثل عندما يتم تحديد منطقة الحل الممكن بيانياً، وسوف نستخدم طريقة نقاط الزوايا Corner Points Solution Method والتى تتطلب البحث عن الربح عند كل نقطة زاوية فى منطقة القبول.

تكون منطقة الحلول الممكنة فى الطريقة البيانية عبارة عن مضلع، وعليه فإن الحل الأمثل يكون فى واحدة من نقاط الزوايا للمضلع المشار إليه سابقاً أم جـ د (الشكل ٤)، ويتم ذلك من خلال:

- تحديد نقاط الزوايا لمنقطة الحلول الممكنة.
- إيجاد قيم هذه النقط.
- اختيار أكبر قيمة.

ويمكن تحديد جميع نقاط زوايا منطقة الحلول الممكنة بسهولة، فيماعدا النقطة (جـ) التى هى حاصل تقاطع الخط المستقيم للقيد الأول مع القيد الثانى. ويتم إيجاد قيمة نقطة التقاطع جـ من حل المعادلتين للمستقيمين المتقاطعين عن طريق إيجاد قيمة أحد المتغيرات (بحذف الأخر)، ثم يتم إيجاد قيمة المتغير الأخر بدلالته كمايلى:

$$٢س_١ + ٤ س_٢ = ٢٠ \qquad (١)$$

$$٥ س_١ + ٣ س_٢ = ٣٠ \qquad (٢)$$

بضرب المعادلة (١) فى ٣ والمعادلة (٢) فى ٤ ينتج أن:

$$٦س_١ + ١٢ س_٢ = ٦٠$$

$$٢٠س_١ + ١٢ س_٢ = ١٢٠$$

بالطرح: $- ١٤ س_١ = - ٦٠$

$$\therefore س_١ = ٤,٢٩$$

وبالتعويض في المعادلة (١) بقيمة $س_١$ لايجاد قيمة $س_٢$:

$٢س_١ + ٤ س_٢ = ٢٠$

$٢(٤,٢٩) + ٤س_٢ = ٢٠$

$٨,٥٨ + ٤ س_٢ = ٢٠$

$٤س_٢ = ١١,٤٢$

$\therefore س_٢ = ٢,٨٦$

$\therefore$ إحداثيات النقطة جـ هي ($س_١ = ٤,٢٩$ ، $س_٢ = ٢,٨٦$).

وبعد ذلك نعوض بقيم نقاط الزوايا في دالة الهدف، ونختار نقطة الزاوية التي تحقق أكبر ربح ممكن لتكون هي نقطة الحل الأمثل:

النقطة	$س_١$	$س_٢$	ص = ٦ $س_١$ + ٤ $س_٢$ (تعظيم)
أ	٠	٠	٦(٠) + ٤(٠) = ٠
م	٦	٠	٦(٦) + ٤(٠) = ٣٦
جـ	٤,٢٩	٢,٨٦	٦(٤,٢٩) + ٤(٢,٨٦) = ٣٧,١٤
د	٠	٥	٦(٠) + ٤(٥) = ٢٠

ومن الجدول السابق يتضح لدينا أن النقطة جـ تحقق الحل الأمثل، لأنها تحقق أكبر ربح ممكن (ص = ٣٧,١٤). وهي أبعد نقطة عن نقطة الأصل يشترك فيها القيدين معاً وتمثل المزيج الانتاجي ($س_١ = ٤,٢٩$، $س_٢ = ٢,٨٦$) الذي يحقق أفضل توليفه إنتاجية للشركة.

يتضح مما سبق أن كل مشكلة برمجة خطية لها عدد لا نهائي من الحلول الممكنة، إلا أن حلاً واحداً فقط من هذه الحلول يوصلنا إلى الحل الأمثل، إذا لم تكن هناك حالة خاصة من نوع تعدد الحلول المثلى.

مثال (٣) :

ينتج مصنع أخشاب نوعين من المنتجات هما الأبواب والشبابيك، بحيث يمر كل منتج على ثلاثة مراحل هى على الترتيب مرحلة القطع، مرحلة التركيب، ثم مرحلة الدهان. وتحتاج الأبواب من كل مرحلة من المراحل الثلاث على الترتيب إلى (ساعة، خمسة ساعات، ثلاث ساعات)، وكذلك تحتاج الشبابيك من كل مرحلة على الترتيب إلى (٢ساعة، ٤ ساعات، ساعة). فإذا كانت طاقة المصنع فى كل مرحلة من المراحل الثلاث على الترتيب هى (١٢ ساعة، ٣٠ ساعة، ١٥ ساعة). وكان المصنع يحقق أرباح ٥٠ جنيه من بيع الباب و٦٠ جنيه من بيع الشباك.

فعبر رياضياً عن هذه المشكلة، ثم أوجد الحل الأمثل الذى يعظم أرباح المصنع.

الحـــل

بافتراض أن الكمية المنتجة من الأبواب هى ($س_١$) ومن الشبابيك ($س_٢$)، ويمكن صياغة المشكلة السابقة كما بالجدول التالى:

المراحل	الأبواب ($س_١$)	الشبابيك ($س_٢$)	طاقة المصنع
القطع	١	٢	١٢
التركيب	٥	٤	٣٠
الدهان	٣	١	١٥

وبالتالى يمكن استنتاج الشروط كالتالى:

$$س_١ + ٢س_٢ \leq ١٢$$
$$٥س_١ + ٤س_٢ \leq ٣٠$$
$$٣س_١ + س_٢ \leq ١٥$$

ويمكن استنتاج دالة الهدف من أرباح بيع الأبواب والشبابيك كالتالى:

ص = ٥٠ $س_١$ + ٦٠ $س_٢$ " تعظيم"

وبالتالى يمكن إعادة صياغة المشكلة رياضياً كالتالى:

دالة الهدف :

تعظيم ص = ٥٠ $س_١$ + ٦٠ $س_٢$

الشروط :

$س_١$ + ٢$س_٢$ ≥ ١٢

٥$س_١$ + ٤$س_٢$ ≥ ٣٠

٣$س_١$ + $س_٢$ ≥ ١٥

$س_١$ ، $س_٢$ ≥ صــفر (شروط عدم السلبية)

- **تحويل القيد الأول إلى معادلة : $س_١$ + ٢$س_٢$ = ١٢**

بوضع $س_١$ = صفر

٢$س_٢$ = ١٢

$س_٢$ = ٦

بوضع $س_٢$ = صفر

$س_١$ = ١٢

الخط : (١٢ ، ٦)

- **تحويل القيد الثانى إلى معادلة : ٥$س_١$ + ٤ $س_٢$ = ٣٠**

بوضع $س_١$ = صفر

٤$س_٢$ = ٣٠

$س_٢$ = ٧,٥

بوضع $س_٢$ = صفر

٥ $س_١$ = ٣٠

$س_١$ = ٦

الخط : (٦ ، ٧,٥)

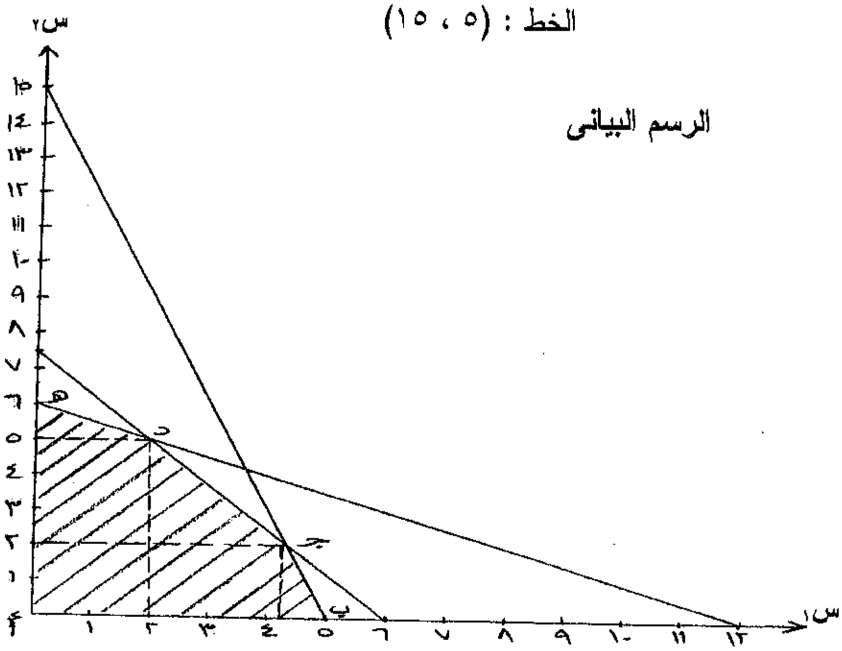
• **تحويل القيد الثالث إلى معادلة : ٣س١ + س٢ = ١٥**

بوضع س١ = صفر
س٢ = ١٥

بوضع س٢ = صفر
٣ س١ = ١٥
س١ = ٥

الخط : (٥ ، ١٥)

الرسم البيانى



النقطة	س١	س٢	ص = ٥٠ س١ + ٦٠ س٢ (تعظيم)
أ	٠	٠	= ٥٠ (٠) + ٦٠ (٠) = ٠
ب	٥	٠	= ٥٠ (٥) + ٦٠ (٠) = ٢٥٠
ج	٤,٣	٢,١	= ٥٠ (٤,٣) + ٦٠ (٢,١) = ٣٤١
د	٢	٥	= ٥٠ (٢) + ٦٠ (٥) = ٤٠٠
هـ	٠	٦	= ٥٠ (٠) + ٦٠ (٦) = ٣٦٠

∴ **الحل الأمثل** : عند النقطة (د) لأنه يعطى أعلى قيمة لدالة الهدف (٤٠٠) من بين الحلول الأساسية الممكنة، وبالتالى يقوم المصنع بانتاج عدد (٢) باب و (٥) شباك ليكون ربحه أكبر ما يمكن.

مثال (٤):

مطلوب تعظيم دالة الهدف : ص = ٩س$_١$ + ١١ س$_٢$

تحت الشروط:

١٠س$_١$ + ١٠س$_٢$ $\leq$ ١٠٠

١٠س$_١$ + ٣٠س$_٢$ $\leq$ ٢٤٠

٢٠س$_١$ + ١٠س$_٢$ $\leq$ ١٦٠

س$_١$ ، س$_٢$ $\geq$ صفر

الحـــــل

- **تحويل القيد لأول إلى معادلة : ١٠س$_١$ + ١٠س$_٢$ = ١٠٠**

بوضع س$_١$ = صفر	بوضع س$_٢$ = صفر
١٠س$_٢$ = ١٠٠	١٠ س$_١$= ١٠٠
س$_٢$ = ١٠	س$_١$ = ١٠

الخط : (١٠ ، ١٠)

- **تحويل القيد الثانى إلى معادلة : ١٠س$_١$ + ٣٠س$_٢$ = ٢٤٠**

بوضع س$_١$ = صفر	بوضع س$_٢$ = صفر
٣٠س$_٢$ = ٢٤٠	١٠ س$_١$= ٢٤٠
س$_٢$ = ٨	س$_١$ = ٢٤

الخط : (٢٤ ، ٨)

- تحويل القيد الثالث إلى معادلة : ٢٠س$_١$ + ١٠س$_٢$ = ١٦٠

بوضع س$_١$ = صفر

١٠س$_٢$ = ١٦٠

س$_٢$ = ١٦

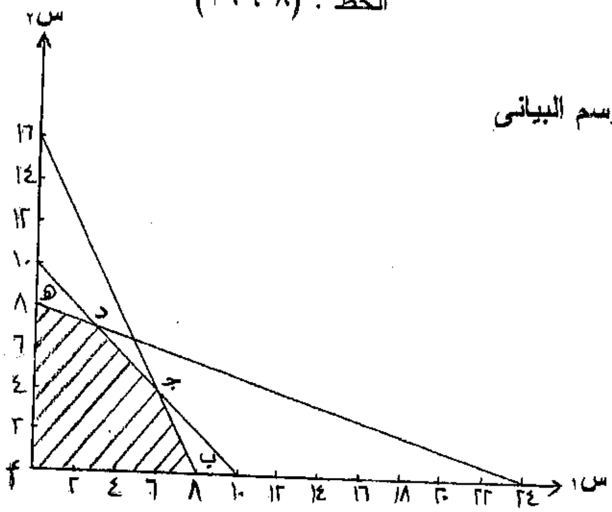
بوضع س$_٢$ = صفر

٢٠ س$_١$ = ١٦٠

س$_١$ = ٨

الخط : (٨ ، ١٦)

الرسم البيانى



النقطة	س$_١$	س$_٢$	ص = ٩س$_١$ + ١١س$_٢$
أ	٠	٠	٩ (٠) + ١١ (٠) = ٠
ب	٨	٠	٩ (٨) + ١١ (٠) = ٧٢
ج	٦	٤	٩ (٦) + ١١ (٤) = ٩٨
د	٣	٧	٩ (٣) + ١١ (٧) = ١٠٤
هـ	٠	٨	٩ (٠) + ١١ (٨) = ٨٨

الحل الأمثل: يمثل الحل الذى يعطى أعلى قيمة لدالة الهدف من بين الحلول الأساسية الممكنة، أى عند النقطة تكون قيمة دالة الهدف أكبر ما يمكن (١٠٤)، وتكون قيمة $س_1$ هى (٣) وقيمة $س_2$ هى (٧) .

ملاحظة:

إذا كان القيد (الشرط) يحتوى على متغير واحد فقط :

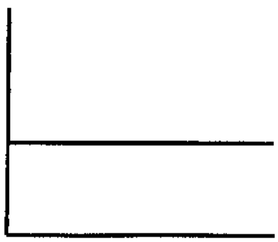
$س_1$ فقط

يتم تمثيله بيانياً بخط رأسى موازى للمحور الرأسي

أو

$س_2$ فقط

يتم تمثيله بيانياً بخط أفقى موازى للمحور الأفقى



مثال (٥) :

مصنع للبلاستيك يقوم بإنتاج أكياس وشنط على ثلاثة مراحل، فإذا كانت الأكياس تحتاج إلى ساعة واحدة فى المرحلة الأولى وساعتان فى المرحلة الثالثة. بينما تحتاج الشنط إلى ساعة واحدة فى كل مرحلة من المراحل الثلاث. وكانت عدد ساعات التشغيل المتاحة هى ١٢٠، ٨٠، ٢٠٠ ساعة لكل مرحلة على الترتيب. ويحقق المصنع أرباح مقدارها ٨ جنيه للكيس و٣ جنيه للشنطة. فأوجد الحل الأمثل لبرنامج البرمجة الخطية.

الحـــــل

بفرض أن عدد الأكياس المنتجة ($س_{١}$) وعدد الشنط ($س_{٢}$) فيمكن تلخيص المشكلة كالتالى:

المراحل	الأكياس ($س_{١}$)	الشنط ($س_{٢}$)	الساعات المتاحة
المرحلة الأولى	١	١	١٢٠
المرحلة الثانية	٠	١	٨٠
المرحلة الثالثة	٢	١	٢٠٠

فيمكن استنتاج القيود كالتالى:

$س_{١} + س_{٢} \geq ١٢٠$

$س_{٢} \geq ٨٠$

$٢س_{١} + س_{٢} \geq ٢٠٠$

ومن الأرباح يمكن استنتاج دالة الهدف كالتالى:

$ص = ٨ س_{١} + ٣ س_{٢}$

وبالتالى يمكن صياغة المشكلة كالتالى:

دالة الهدف : تعظيم $ص = ٨ س_{١} + ٣ س_{٢}$

تحت الشروط :

$س_{١} + س_{٢} \geq ١٢٠$

$س_{٢} \geq ٨٠$

$٢س_{١} + س_{٢} \geq ٢٠٠$

$س_{١}$ ، $س_{٢} \leq$ صـــفر

- تحويل القيد الأول إلى معادلة : س$_1$ + س$_2$ = ١٢٠

بوضع س$_1$ = صفر
س$_2$ = ١٢٠

بوضع س$_2$ = صفر
س$_1$ = ١٢٠

الخط : (١٢٠ ، ١٢٠)

- تحويل القيد الثانى إلى معادلة : س$_2$ = ٨٠

الخط : (٠ ، ٨٠)

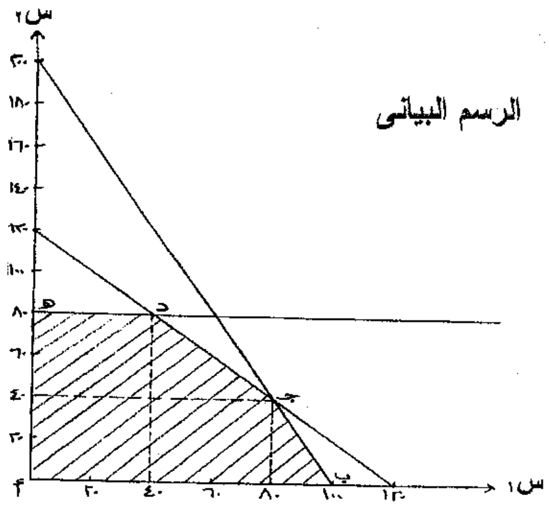
- تحويل القيد الثالث إلى معادلة : ٢س$_1$ + س$_2$ = ٢٠٠

بوضع س$_1$ = صفر
س$_2$ = ٢٠٠

بوضع س$_2$ = صفر
س$_1$ = ١٠٠

الخط : (١٠٠ ، ٢٠٠)

الرسم البيانى



النقطة	س$_{١}$	س$_{٢}$	ص = ٨س$_{١}$ + ٣س$_{٢}$
أ	٠	٠	= ٨ (٠) + ٣ (٠) = ٠
ب	١٠٠	٠	= ٨ (١٠٠) + ٣ (٠) = ٨٠٠
ج	٨٠	٤٠	= ٨ (٨٠) + ٣ (٤٠) = ٧٦٠
د	٤٠	٨٠	= ٨ (٤٠) + ٣ (٨٠) = ٥٦٠
هـ	٠	٨٠	= ٨ (٠) + ٣ (٨٠) = ٢٤٠

الحل الأمثل: يمثل الحد الأعلى لقيمة دالة الهدف من بين الحلول الأساسية الممكنة، أى عند النقطة (ب) والذى يحقق ربح قدره ٨٠٠ جنيه، وتكون الكمية المنتجة من الأكياس هى س$_{١}$ = ١٠٠ ، والكمية المنتجة من الشنط هى س$_{٢}$ = صفر بمعنى الاكتفاء بإنتاج الأكياس فقط وعدم إنتاج شنط لتعظيم الأرباح.

حالة تخفيض التكاليف Minimization Costs:

هناك الكثير من مشاكل البرمجة الخطية التى يكون الهدف من إيجاد الحل الأمثل لها هو تخفيض التكاليف بدلاً من تعظيم الأرباح، ويتجسد هذا بشكل خاص فى المشاريع التى لا تهدف إلى تحقيق أرباح كالمشروعات ذات النفع العام.

كثير من مشاكل البرمجة الخطية تتضمن تخفيض دالة الهدف، مثل التكلفة بدلاً من دالة تعظيم الربح. وعلى سبيل المثال نذكر الأمثلة التالية:

١- ترغب إدارة أحد المطاعم تطوير جدول عمل يلائم احتياجاته من العمال بما يؤدى إلى تخفيض العدد الكلى للعاملين.

٢- تبحث إدارة أحد المصانع عن طريقة توزيع منتجاته من فروعه المتعددة إلى عدة مخازن إقليمية لتخفيض تكاليف النقل الكلية.

٣- ترغب إدارة مستشفى توفير الوجبة اليومية للمرضى بحيث تحتوى على البروتين القياسى بالإضافة إلى تخفيض تكاليف شراء الغذاء.

وتعتبر عملية التمثيل البيانى لمشاكل التخفيض مشابهة تقريباً لما هو عليه فى مشاكل التعظيم، مع وجود اختلافات يمكن بيانها كمايلى:

(١) إن القيود فى مشاكل التخفيض تكون على الأرجح متباينات من نوع $\geq$ بدلاً من $\leq$، مما يجعل منطقة الحل الممكن خارج الشكل المضلع بدلاً من أن تقع فى داخله.

(٢) نقطة الحل الأمثل فى حالة التخفيض هى الأقرب إلى نقطة الأصل، أى أن منطقة الحل الأمثل لمشاكل تخفيض التكاليف تكون إلى يمين القيود، وهى غير محددة.

مثال (٦):

إذا كانت لدينا دالة التكاليف الآتية:

تخفيض : ص = ٢س$_1$ + ٤س$_2$

الشروط:

٢س$_1$ + س$_2$ $\geq$ ١٤

س$_1$ + س$_2$ $\geq$ ١٢

س$_1$ + ٣س$_2$ $\geq$ ١٨

س$_1$ ، س$_2$ $\geq$ صفر

المطلوب: إيجاد قيمة $س_١$ ، $س_٢$ التى تجعل قيمة التكاليف (ص) أقل ما يمكن باستخدام طريقة الرسم البيانى.

الحـــل

- **تحويل القيد الأول إلى معادلة : $٢س_١ + س_٢ = ١٤$**

عند $س_١$ = صفر ∴ $س_٢ = ١٤$

عند $س_٢$ = صفر ∴ $س_١ = ٧$

الخط : **(٧ ، ١٤)**

- **تحويل القيد الثانى إلى معادلة : $س_١ + س_٢ = ١٢$**

عند $س_١$ = صفر ∴ $س_٢ = ١٢$

عند $س_٢$ = صفر ∴ $س_١ = ١٢$

الخط : **(١٢ ، ١٢)**

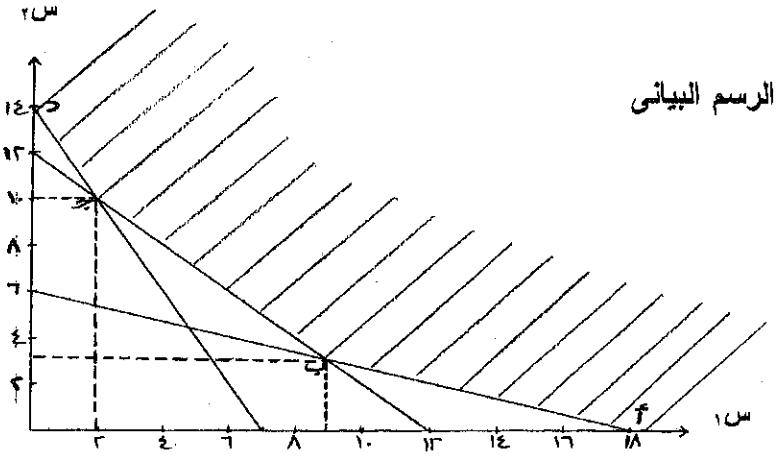
- **تحويل القيد الثالث إلى معادلة : $س_١ + ٣س_٢ = ١٨$**

عند $س_١$ = صفر ∴ $س_٢ = ٦$

عند $س_٢$ = صفر ∴ $س_١ = ١٨$

الخط : **(١٨ ، ٦)**

الرسم البيانى



النقطة	$س_1$	$س_2$	ص = ٢$س_1$ + ٤$س_2$ (تخفيض)
أ	١٨	٠	= ٢ (١٨) + ٤ (٠) = ٣٦
ب	٩	٣	= ٢ (٩) + ٤ (٣) = ٣٠
ج	٢	١٠	= ٢ (٢) + ٤ (١٠) = ٤٤
د	٢	١٤	= ٢ (٠) + ٤ (١٤) = ٥٦

الحل الأمثل: عند النقطة ب ($س_1$ = ٩ ، $س_2$ = ٣) لأنها تحقق أقل تكاليف ممكنة (٣٠)، ولذلك فإن النقطة ب تمثل الحل الأمثل.

مثال (٧):

مصنع ملابس جاهزة ينتج ثلاثة أنواع وهى رجالى، حريمى، أطفال ويعمل لديه عاملان يقوم الأول بتجميع ٢٠ ، ١٦ ، ٨ قطعة يومياً من كل نوع على الترتيب، ويقوم العامل الثانى بتجميع ٩ ، ١٤، ٣٤ قطعة يومياً على الترتيب. فإذا كان لدى المصنع طلبية بانتاج ١٨٠ وحدة ملابس رجالى و ٢٢٤ وحدة ملابس حريمى و ٢٧٢ وحدة ملابس أطفال. وكان أجر العامل الأول

يومياً ٤٠ جنيه وأجر العامل الثانى يومياً أيضاً ٣٥ جنيه. فأوجد عدد الأيام التى يعملها كل عامل حتى يحقق المصنع أقل تكلفة ممكنة باستخدام أسلوب البرمجة الخطية.

الحـــــل

بافتراض أن عدد الأيام التى يعملها العامل الأول (س$_{١}$) والعامل الثانى (س$_{٢}$)، وبالتالى يمكن استنتاج القيود كالتالى:

	العامل الأول (س$_{١}$)		**العامل الثانى (س$_{٢}$)**		**الاجمالى**
رجالى	٢٠س$_{١}$	+	٩ س$_{٢}$	≥	١٨٠
حريمى	١٦ س$_{١}$	+	١٤ س$_{٢}$	≥	٢٢٤
أطفال	٨ س$_{١}$	+	٣٤ س$_{٢}$	≥	٢٧٢

ومن أجر كل عامل يومياً يمكن استنتاج دالة الهدف كالتالى:

ص = ٤٠ س$_{١}$ + ٣٥ س$_{٢}$ (تخفيض).

وبالتالى يمكن صياغة مشكلة البرمجة الخطية كالتالى:

دالة الهدف : تخفيض ص = ٤٠ س$_{١}$ + ٣٥ س$_{٢}$

الشروط :

٢٠س$_{١}$ + ٩س$_{٢}$ ≥ ١٨٠

١٦س$_{١}$ + ١٤س$_{٢}$ ≥ ٢٢٤

٨س$_{١}$ + ٣٤س$_{٢}$ ≥ ٢٧٢

س$_{١}$ ، س$_{٢}$ ≥ صفر

- **تحويل القيد الأول إلى معادلة : $٢٠س_١ + ٩س_٢ = ١٨٠$**

بوضع $س_١$ = صفر	بوضع $س_٢$ = صفر
$٩س_٢ = ١٨٠$	$٢٠ س_١ = ١٨٠$
∴ $س_٢ = ٢٠$	∴ $س_١ = ٩$

الخط : (٩ ، ٢٠)

- **تحويل القيد الثانى إلى معادلة : $١٦س_١ + ١٤س_٢ = ٢٢٤$**

بوضع $س_١$ = صفر	بوضع $س_٢$ = صفر
$١٤س_٢ = ٢٢٤$	$١٦ س_١ = ٢٢٤$
∴ $س_٢ = ١٦$	∴ $س_١ = ١٤$

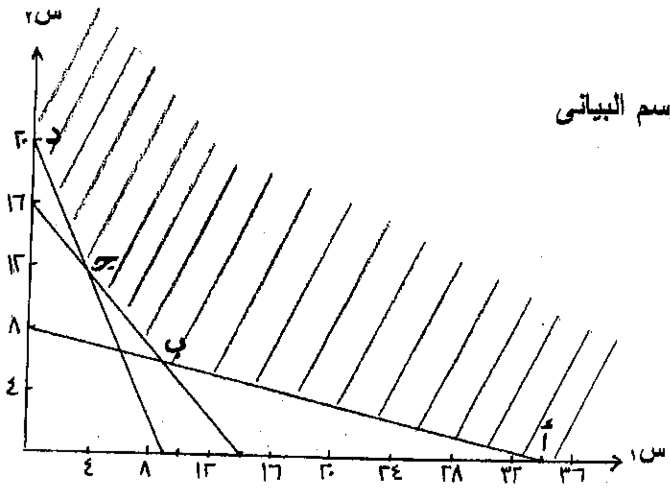
الخط : (١٤ ، ١٦)

- **تحويل القيد الثالث إلى معادلة : $٨س_١ + ٣٤س_٢ = ٢٧٢$**

بوضع $س_١$ = صفر	بوضع $س_٢$ = صفر
$٣٤ س_٢ = ٢٧٢$	$٨ س_١ = ٢٧٢$
∴ $س_٢ = ٨$	∴ $س_١ = ٣٤$

الخط : (٣٤ ، ٨)

الرسم البيانى



النقطة	س١	س٢	ص = ٤٠س١ + ٣٥س٢ (تخفيض)
أ	٣٤	٠	= ٤٠ (٣٤) + ٣٥ (٠) = ١٣٦٠
ب	٨,٨	٥,٩	= ٤٠ (٨,٨) + ٣٥ (٥,٩) = ٥٥٨,٥
ج	٣,٧	١١,٨	= ٤٠ (٣,٧) + ٣٥ (١١,٨) = ٥٦١
د	٠	٢٠	= ٤٠ (٠) + ٣٥ (٢٠) = ٧٠٠

الحل الأمثل : عند النقطة (ب) حيث تحقق أقل تكلفة وهى ٥٥٨,٥، ويكون عدد الأيام التى يعملها العامل الأول (س١) هى ٨,٨ (٩ أيام تقريباً) وعدد الأيام التى يعملها العامل الثانى (س٢) هى ٥,٩ (٦ أيام تقريباً).

مثال (٨):

مصنع لانتاج الأجهزة ينتج ثلاثة أنواع من الحاسبات فى قسمين للانتاج، وقد حصل المصنع على أمر توريد للأنواع الثلاثة أ ، ب ، ج قدره (٢٠٠ ،

٦٠٠، ٦٠٠) من كل نوع على الترتيب. وكان عدد الحاسبات الممكن إنتاجها في كل من القسمين في الساعة كالآتي:

نوع الحاسب	عدد الحاسبات الممكن انتاجها فى القسم الأول	عدد الحاسبات الممكن إنتاجها فى القسم الثانى
أ	١٠	١٠
ب	٦٠	١٠
ج	٢٠	٦٠

وكانت تكلفة التشغيل في القسمين في الساعة هي ٦٠ جنيه و ٤٠ جنيه على الترتيب. فكم عدد ساعات تشغيل كل قسم لتحقيق أقل تكلفة.

الحـــل

بافتراض عدد ساعات تشغيل القسم الأول س١ والقسم الثانى س٢، وبالتالى يمكن إستنتاج القيود التالية:

$$١٠ س_{١} + ١٠ س_{٢} \geq ٢٠٠$$

$$٦٠ س_{١} + ١٠ س_{٢} \geq ٦٠٠$$

$$٢٠ س_{١} + ٦٠ س_{٢} \geq ٦٠٠$$

ومن تكلفة تشغيل كل قسم يمكن إستنتاج دالة الهدف كالتالى:

ص = ٦٠ س١ + ٤٠ س٢ (تخفيض).

وبالتالى يمكن صياغة مشكلة البرمجة الخطية كالآتى:

دالة الهدف :

تخفيض : ص = ٦٠ $س_١$ + ٤٠ $س_٢$

الشروط :

١٠ $س_١$ + ١٠ $س_٢$ $\geq$ ٢٠٠

٦٠ $س_١$ + ١٠ $س_٢$ $\geq$ ٦٠٠

٢٠ $س_١$ + ٦٠ $س_٢$ $\geq$ ٦٠٠

$س_١$ ، $س_٢$ $\geq$ صفر

- **تحويل القيد الأول إلى معادلة : ١٠$س_١$ + ١٠$س_٢$ $\geq$ ٢٠٠**

بوضع $س_١$ = صفر	بوضع $س_٢$ = صفر
١٠ $س_٢$ = ٢٠٠	١٠ $س_١$ = ٢٠٠
∴ $س_٢$ = ٢٠	∴ $س_١$ = ٢٠

الخط : (٢٠ ، ٢٠)

- **تحويل القيد الثانى إلى معادلة : ٦٠$س_١$ + ١٠$س_٢$ $\geq$ ٦٠٠**

بوضع $س_١$ = صفر	بوضع $س_٢$ = صفر
١٠$س_٢$ = ٦٠٠	٦٠ $س_١$ = ٦٠٠
∴ $س_٢$ = ٦٠	∴ $س_١$ = ١٠

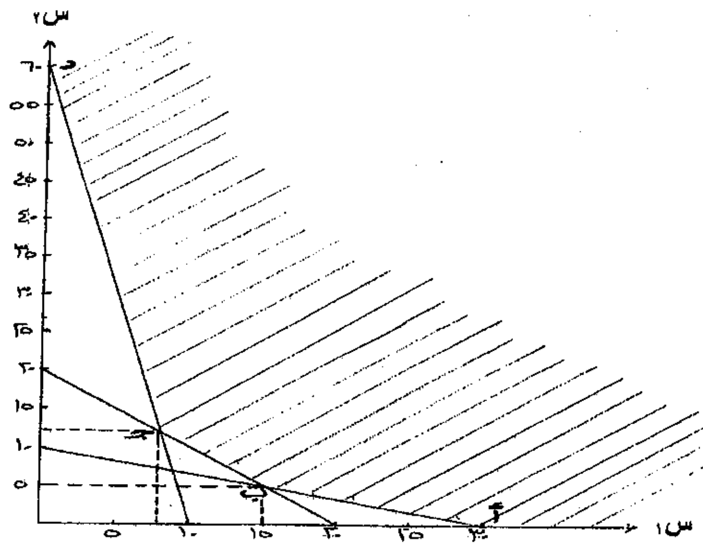
الخط : (١٠ ، ٦٠)

- تحويل القيد الثالث إلى معادلة : 20س$_1$ + 60س$_2$ = 600

بوضع س$_2$ = صفر	بوضع س$_1$ = صفر
20 س$_1$ = 600	60 س$_2$ = 600
∴ س$_1$ = 30	∴ س$_2$ = 10

الخط : (30 ، 10)

الرسم البيانى



النقطة	$س_1$	$س_2$	ص = ٦٠$س_1$ + ٤٠$س_2$ (تخفيض)
أ	٣٠	٠	= ٦٠ (٣٠) + ٤٠ (٠) = ١٨٠٠
ب	١٥	٥	= ٦٠ (١٥) + ٤٠ (٥) = ١١٠٠
ج	٨	١٢	= ٦٠ (٨) + ٤٠ (١٢) = ٩٦٠
د	٠	٦٠	= ٦٠ (٠) + ٤٠ (٦٠) = ٢٤٠٠

الحل الأمثل: عند النقطة (ج) حيث تعطى أقل تكلفة ٩٦٠ جنيه، وتكون عدد ساعات تشغيل القسم الأول ($س_1$) = ٨ساعات، وعدد ساعات تشغيل القسم الثانى ($س_2$) = ١٢ ساعة.

تمــــارين

١- اختر الإجابة الصحيحة لكل مما يأتى :

(أ) عند استخدام إجراءات الحل البيانى فإن المنطقة التى تحددها مجموعة القيود تسمى:

(١) الحل — (٣) منطقة الربح الأعلى

(٢) منطقة الحل الممكن — (٤) منطقة الحل غير الممكن

(ب) الطريقة البيانية تستخدم لحل مشكلة البرمجة الخطية عندما:

(١) يكون هناك قيدين فقط للمشكلة. — (٣) يكون هناك متغيرين فقط للمشكلة.

(٢) يكون هناك أكثر من قيدين للمشكلة. — (٤) يكون هناك أكثر من متغيرين للمشكلة.

٢- لأى قيم لـــ س$_١$ ، س$_٢$ تكون ص = ١٨ س$_١$ + ١٢ س$_٢$ أكبر ما يمكن تبعاً للقيود التالية:

س$_١$ + ٣ س$_٢$ ≤ ١٢

س$_١$ + ٢ س$_٢$ ≤ ١٠

س$_١$ ، س$_٢$ ≥ صفـــر

٣- لأى قيم لـــ س$_١$ ، س$_٢$ تكون ص = ١٥ س$_١$ - ١٠ س$_٢$ أصغر ما يمكن تبعاً للقيود التالية:

س$_١$ + ٣ س$_٢$ ≤ ٩

س$_١$ + ٢ س$_٢$ ≤ ٩

س$_١$ ، س$_٢$ ≥ صفـــر

٤- لأى قيم لـــ س$_١$ ، س$_٢$ تكون ص = ٢ س$_١$ + ٣ س$_٢$ أكبر ما يمكن تبعاً للقيود الآتية:

٥ س$_١$ + ٢ س$_٢$ ≤ ٩

٦ س$_١$ - ٢ س$_٢$ ≤ ٢

س$_٢$ ≤ ٦

س$_1$ ، س$_2$ ≥ صفــر

٥- حدد منطقة الحل المقبول (الممكن) للقيود التالية:

(أ) س$_1$ + ٢ س$_2$ ≤ ١٢
٥ س$_1$ + ٤ س$_2$ ≤ ٣٠
٣ س$_1$ + س$_2$ ≤ ١٥
س$_1$ ، س$_2$ ≥ صفر

(ب) ٠,٥س$_1$ + ٠,٢٥س$_2$ ≥ ٣٠
س$_1$ + ٥ س$_2$ ≥ ٢٥٠
٠,٢٥س$_1$ + ٠,٥ س$_2$ ≤ ٥٠
س$_1$ ، س$_2$ ≥ صفر

(جـ) س$_1$ + س$_2$ ≤ ١٦٠
٢ س$_1$ + ٠,٥ س$_2$ ≤ ١٢٠
٢ س$_1$ + ١,٦س$_2$ ≤ ١٦٠
س$_1$ ، س$_2$ ≥ صفر

(د) ٣ س$_1$ + ٤ س$_2$ ≤ ٦٠
٤ س$_1$ + ٢ س$_2$ ≤ ٦٠
س$_1$ ≤ ١٠
س$_2$ ≤ ١٢
س$_1$ ، س$_2$ ≥ صفر

(هـ) ٢٥س$_1$ + ٩ س$_2$ ≥ ٢٢٥
١٦ س$_1$ + ١٤ س$_2$ ≥ ٢٢٤
٨ س$_1$ + ٣٤ س$_2$ ≥ ٢٧٢
س$_1$ ، س$_2$ ≥ صفــر

(و) ٢٠س$_1$ + ١٠س$_2$ ≥ ١٢٠
١٠س$_1$ + ٢٠س$_2$ ≥ ١٠٠
١٠س$_1$ + ١٠س$_2$ ≥ ٨٠
س$_1$ ، س$_2$ ≥ صفر

(ز) ٢٠س$_1$ + ٦ س$_2$ ≥ ١٢٠
١٤س$_1$ + ١٨س$_2$ ≥ ٢٥٢
٨س$_1$ + ٢٨س$_2$ ≥ ٢٢٤
س$_1$ ، س$_2$ ≥ صفر

(ح) ٢س$_1$ + ٣س$_2$ ≤ ٣٠٠
٣س$_1$ + ٦س$_2$ ≥ ٢٤٠
٢س$_1$ + ٣س$_2$ ≥ ٣٠٠
س$_1$ ، س$_2$ ≥ صفر

(٦) حل البرنامج الخطى الآتى بيانياً:

تعظيم : ص = ٥ س$_1$ + ٥ س$_2$

الشروط :

س$_1$ ≤ ١٠٠

س$_2$ ≤ ٨٠

٢ س$_١$ + ٤ س$_٢$ $\geq$ ٤٠٠

س$_١$ ، س$_٢$ $\geq$ صفـــر

(٧) أوجد حل مشكلة البرمجة الخطية الآتية بيانياً:

(أ) تعظيم : ص = ٢ س$_١$ + ٣ س$_٢$

الشروط :

س$_١$ + ٢ س$_٢$ $\geq$ ٦

٥ س$_١$ + ٣ س$_٢$ $\geq$ ١٥

س$_١$ ، س$_٢$ $\geq$ صفر

(ب) تعظيم : ص = ٣ س$_١$ + ٣ س$_٢$

الشروط:

٢ س$_١$ + ٤ س$_٢$ $\geq$ ١٢

٦ س$_١$ + ٤ س$_٢$ $\geq$ ٢٤

س$_١$ ، س$_٢$ $\geq$ صفر

وإذا تغيرت دالة الهدف إلى ص = ٢ س$_١$ + ٦ س$_٢$ فما هو الحل الأمثل.

الباب الرابع

الفئــــــات

يستعرض هذا الباب المفاهيم الرياضية للفئات والتي تعتبر بلا شك الحجر الأساسي للرياضيات حيث تعتمد عليها مفاهيم كثيرة كالدوال والعلاقات والاحتمالات وغيرها. كما يستعرض أيضاً العمليات الجبرية التي يمكن إجراؤها على الفئات.

مفهوم الفئة :

في حياتنا اليومية تُستخدم كثيراً من التعبيرات التي تدل على تجمع لبعض الأشياء ومن أمثلة هذه الكلمات التي تستخدمها (جماعة ، فريق ، ....). عندما تكون الأشياء المكونة للتجمع الذي نعبر عنه بإحدى هذه الكلمات معرفة ومحددة تماماً بحيث يمكن الحكم على أحدها بأنه ضمن هذا التجمع "ينتمي إليه" فإننا نطلق على هذا التجمع اسم "فئة".

تعريف الفئة :

هي تجمع لبعض الأشياء المعرفة والمحددة تماماً والتي تشترك جميعها في نفس الخاصية، وتسمى الأشياء التي تتكون منها الفئة بالعناصر elements، وفيما يلي أمثلة توضيحية :

مثال (١) :

فئة الأعداد الصحيحة الفردية الموجبة التي تقع بين ١ ، ١٠ وهذه الفئة تتكون من أربعة عناصر هي : ٣ ، ٥ ، ٧ ، ٩.

مثال (٢) :

فئة أيام الأسبوع والتي تتكون من سبعة عناصر هي : السبت ، الأحد ، الاثنين ، الثلاثاء ، الأربعاء ، الخميس ، الجمعة.

مثال (٣) :

فئة حروف كلمة عين شمس وهذه الفئة تتكون من ستة عناصر هي :

ع ، ى ، ن ، ش ، م ، س

وسوف نرمز للفئات بحروف كبيرة مثل **أ** ، **ب** ، **س** ، **ف** ، ..... وللعناصر داخل الفئة بحروف صغيرة مثل أ ، ب ، س ، ص ، ....

وإذا كانت س ترمز لعنصر من عناصر الفئة ف فإننا نكتب ذلك كالآتي: س ∋ ف ، وإذا كانت ص ليست عنصراً من عناصر الفئة ف فإننا نكتب ذلك كالآتي : ص ∌ ف.

مثال (٤) :

إذا كانت ف ترمز إلى فئة الأعداد الصحيحة الزوجية فإن :

٢ ∋ ف ، ٨ ∋ ف ، ٩ ∌ ف ، ٦,٤ ∌ ف.

وتوجد طريقتان لكتابة أي فئة هما :

١- طريقة السرد (القائمة) :

ويكون ذلك بعمل قائمة بجميع عناصر الفئة مع وضع فصلة "،" بين كل عنصرين من عناصر الفئة ، ووضع جميع العناصر داخل قوسين {.....}.

مثال (٥) :

إذا كانت ف ترمز إلى فئة الأعداد الصحيحة الزوجية الموجبة التي تقع بين ١ ، ١١ فإنه يمكن كتابة الفئة ف كالتالي :

ف = { ٢ ، ٤ ، ٦ ، ٨ ، ١٠}

٢- طريقة الصفة المميزة لعناصر الفئة :

وتستخدم هذه الطريقة إذا كان لعناصر الفئة صفة مميزة تحددها تحديداً واضحاً وتميزها عن أية عناصر أخرى فإن التعبير عنها بذكر هذه الميزة يكون أسهل من سردها. فإذا كانت ف ترمز إلى فئة معينة تتحدد عناصرها بخاصية أو مجموعة خواص (خ) فإننا نكتب ذلك كالآتي :

ف = { س : س له الخواص خ }

ويعني ذلك أن الفئة ف تتكون من جميع العناصر س التي تتصف بالخواص (خ) ، ويعني الرمز " : " بحيث أن.

مثال (٦) :

إذا كانت ف ترمز لفئة الأعداد الصحيحة الزوجية الموجبة فإننا نكتب :

ف = { س : س عدد صحيح زوجي موجب }

مثال (٧) :

أكتب بطريقة السرد كلاً من الفئات التالية :

١- أ = فئة فصول السنة.

٢- ب = فئة الأعداد الطبيعية التي تقل عن ٥.

٣- ج = فئة الحروف الأبجدية التي تكون كلمة عين شمس.

الحـــل

١- أ = { الشتاء ، الصيف ، الربع ، الخريف }

٢- ب = { ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ }

٣- ج = { ع ، ي ، ن ، ش ، م ، س }

مثال (٨) :

أكتب بطريقة الصفة المميزة كلاً من الفئات التالية :

١- ب = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ }

٢- ج = { ٢ ، ٤ ، ٦ ، ٨ }

الحـــل

١- ب = { س : ١ ≤ س ≤ ٤ ، س عدد صحيح }

٢ - ج = { س : س عدد صحيح زوجي موجب يقع بين ١ ، ٩ }

ملاحظات :

١- يقال لفئتين أنهما متساويتان إذا كان لهما نفس العناصر بالضبط. فمثلاً الفئة { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٦} هي نفسها الفئة {٢ ، ١ ، ٦ ، ٣} حيث أن كلاً من الفئتين تحتوي على نفس العناصر ، ونعبر عن ذلك كالتالي :

{ ١ ، ٢ ، ٣ ، ٦ } = { ٢ ، ١ ، ٦ ، ٣}

٢- تكرار عناصر الفئة لا يغير الفئة ، فمثلاً الفئتان :

{ ١ ، ٢ ، ٣ } = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٢ ، ١ ، ٣ }

٣- تغيير ترتيب عناصر الفئة لا يغير الفئة.

فمثلاً : { أ ، ب ، ج ، ء } = { ء ، ج ، ب ، أ }

٤- يكفي لعدم تساوي فئتين وجود عنصر واحد فقط في أحدهما لا ينتمي إلى الأخرى.

أنواع خاصة من الفئات:

يوجد فئات معينة ذات أهمية خاصة في دراسة الفئات ، سوف نقدم بعضها فيما يلي :

١ـ الفئة الشاملة (Universal set)

هي الفئة التي تشتمل على جميع العناصر الممكنة في الدراسة محل الاعتبار ، أو بمعنى آخر فإن جميع الفئات تحت الدراسة تكون فئات جزئية من فئة ثابتة تسمى الفئة الشاملة والتي سوف نرمز لها بالرمز شـ. وتختلف الفئة الشاملة من حالة إلى أخرى فمثلاً قد تكون الفئة الشاملة في دراسة ما هي سكان مدينة ما وفي دراسة أخرى فتكون هي الجامعات الحكومية الموجودة في جمهورية مصر العربية.

٢ـ الفئة الخالية (Null set)

الفئة التي لا تحتوي على أي عنصر ، ويرمز لها بالرمز $\varnothing$ أو { }.

مثال (٩) :

إذا كانت ف هي فئة الأطباء في أحد المستشفيات الذين يزيد عمرهم عن ٢٠٠ سنة ، فإن ف تمثل فئة خالية أي أن :

ف = ∅ = { }

٣ـ الفئة الجزئية

تعتبر الفئة **أ** فئة جزئية من الفئة **ب** إذا كان كل عنصر في الفئة **أ** عنصراً أيضاً في الفئة **ب** ، ويرمز لها بالرمز **أ** ⊃ **ب**.

مثال (١٠) :

إذا كان لدينا الفئات **أ** ، **ب** ، **ج** التالية :

أ = { ٢ ، ٤ ، ٦ } ، **ب** = { ١ ، ٣ ، ٥ }

ج = { ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ }

فإن : **أ** ⊃ **ج** لأن كل عنصر في الفئة **أ** ينتمي إلى الفئة **ج**

ب ⊃ **ج** لأن كل عنصر في الفئة **ب** ينتمي إلى الفئة **ج**

أ ⊅ **ب**

ملاحظة :

تمثل الفئة الخالية ∅ فئة جزئية من أي فئة بمعنى أن :

∅ ⊃ أ ، ∅ ⊃ **ب** ، ∅ ⊃ **ج**

٤ـ الفئة المكملة

مكملة الفئة أ هي الفئة التي تحتوي على جميع عناصر الفئة الشاملة ما عدا عناصر الفئة أ. ويرمز للفئة المكملة للفئة أ بالرمز أَ

مثال (١١) :

إذا كانت الفئة الشاملة شـ والفئة (أ) هما :

شـ = { ١ ، ٣ ، ٥ ، ٧ ، ٩ ، ١١ }

أ = { ١ ، ٧ ، ١١ }

فإن مكملة الفئة أ هي الفئة أَ حيث :

أَ = { ٣ ، ٥ ، ٩ }

ملاحظات :

يتضح مما سبق أن تقاطع أي فئة ومكملها يمثل الفئة الخالية بمعنى ، أن:

أ ∩ أَ = ∅

كذلك فإن أتحاد أي فئة ومكملها يمثل الفئة الشاملة (ش) بمعنى أن :

أ ∪ أَ = شـ

٥ـ الفئات المنتهية والفئات غير المنتهية (Finite and Infinite sets)

تكون الفئات منتهية إذا كانت تتكون من عدد محدود من العناصر المختلفة ، أي أنه يمكن عد العناصر المختلفة للفئة أو حصرها ، وفيما يلي أمثلة توضح ذلك :

مثال (١٢) :

إذا كانت أ = { س : س عدد صحيح موجب أقل من مائة } فإن أ تكون فئة منتهية حيث : أ = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ... ، ١٠٠ }

مثال (١٣) :

إذا كانت ب = { س : س عدد صحيح زوجي } فإن ب تكون فئة غير منتهية حيث أن : ب = { .... ، ٦ ، ٤ ، ٢ ، ٠ ، – ٢ ، – ٤ ، – ٦ ، ....}

ومن أمثلة الفئات المنتهية هي فئة حروف الهجاء وفئة سكان جمهورية مصر العربية في لحظة ما.

العمليات على الفئات :

١ـ اتحاد فئتين (Union of tow sets) :

اتحاد الفئتين أ ، ب نشير إليه بالرمز أ ∪ ب ويعرف بأنه الفئة التي تحتوي على جميع العناصر الموجودة في كل من الفئة أ أو الفئة ب أو كليهما معاً. ونعبر عن ذلك رياضياً :

أ ∪ ب = { س : س ∋ أ أو س ∋ ب }

مثال (١٤) :

إذا كانت : أ = { ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨ } ، ب = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ }

فإن أ ∪ ب = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨ }

٢ـ تقاطع فئتين (Intersection of two sets) :

تقاطع فئتين أ ، ب نشير إليه بالعبارة أ ∩ ب ويعرف بأنه الفئة التي تحتوي على جميع العناصر التي تنتمي إلى كل من أ و ب في نفس الوقت ونعبر عنه رياضياً كالتالي :

$أ \cap ب = \{ س : س \ni أ ، س \ni ب \}$

وفي مثال (١٤) السابق يمكن إيجاد :

$أ \cap ب = \{ ٤ ، ٥ ، ٦ \}$

ملاحظات :

الفئة أ ∩ ب هي فئة جزئية من الفئة أ ∪ ب والعكس غير صحيح.

إذا كان أ ∩ ب = ∅ فهذا يعني أن الفئتين أ ، ب فئتان منفصلتان.

٣ـ الفرق بين فئتين :

الفرق بين الفئة أ والفئة ب عبارة عن فئة العناصر التي تنتمي إلى الفئة (أ) ولا تنتمي إلى الفئة (ب) ويرمز لها بالرمز أ – ب وتقرأ أ فرق ب ويُعَبر عنه رياضياً كالتالي :

$أ - ب = \{ س : س \ni أ ، س \not\ni ب \}$

مثال (١٥) :

إذا كانت : أ = { ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨ ، ٩ ، ١٠ } ، ب { ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ }

ج = { ٧ ، ٨ ، ٩ }

فإن :

أ – ب = { ٧ ، ٨ ، ٩ ، ١٠ } ، ب – ج = { ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ }

أ – ج = { ٥ ، ٦ ، ١٠ } ، ج – أ = ∅

٤ـ الفئة المكملة (Complement set) :

إذا كانت شـ هي الفئة الشاملة ، أ هي فئة جزئية من شـ ، فإن الفئة المكملة أَ هي الفئة التي تحتوي على جميع عناصر شـ التي لا تنتمي إلى الفئة أ ، ونشير إليها بالرقم أَ ، ونعبر عن ذلك رياضياً :

أَ = { س : س ∈ ش ، س ∉ أ }

مثال (١٦) :

إذا كانت الفئة الشاملة شـ والفئة أ كالتالي :

شـ = { ٦ ، ٧ ، ٨ ، ٩ ، ١٠ ، ١١ ، ١٢ }

أ = { ١٠ ، ١١ ، ١٢ }

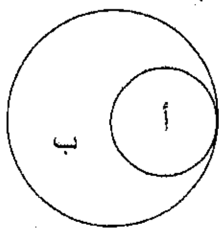
فإن أَ = { ٦ ، ٧ ، ٨ ، ٩ }

استخدام أشكال فن للتعبير عن الفئات (Venn Diagrams) :

يمكن تمثيل العلاقات بين الفئات بيانياً ، حيث يعبر عادة عن الفئة بدائرة، والفئة الشاملة بمستطيل. وسوف نوضح ذلك من خلال الأمثلة التالية :

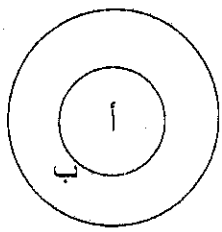
مثال (١٧) :

إذا كانت أ فئة جزئية من ب فإن ذلك يمكن التعبير عنه بشكل (١) أو شكل (٢) الآتيين :



أ ⊂ ب

شكل (١)

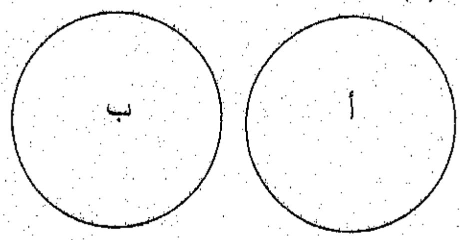


أ ⊂ ب

شكل (٢)

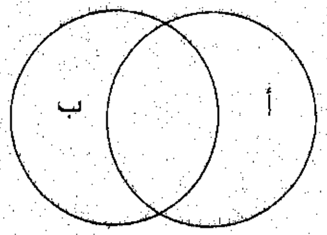
مثال (١٨) :

إذا كانت **أ** ليست فئة جزئية من **ب** فإن ذلك يمكن التعبير عنه بشكل (٣) أو شكل (٤) الآتيين :



أ ⊄ ب

شكل (٣)



أ ⊄ ب

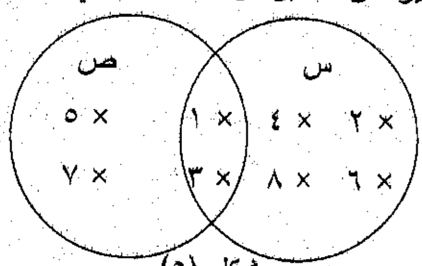
شكل (٤)

مثال (١٩) :

إذا كانت لديك الفئات التالية :

س = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٦ ، ٨ } ، ص = { ١ ، ٣ ، ٥ ، ٧ }

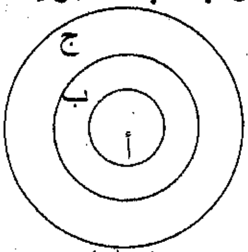
فإنه يمكن التعبير عن الفئتين س ، ص كما في الشكل (٥) :



شكل (٥)

مثال (٢٠) :

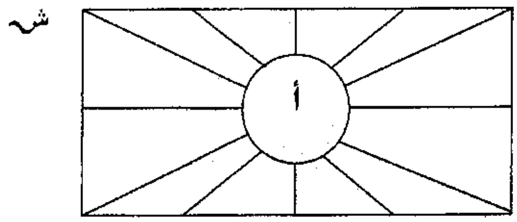
إذا كانت **أ** فئة جزئية من **ب** ، **ب** فئة جزئية من **ج** فإنه يمكن التعبير عن ذلك كما في شكل (٦) :



شكل (٦)

مثال (٢١) :

إذا كانت **أ** فئة جزئية من الفئة الشاملة شـ ، فإنه يمكن التعبير عن الفئة المكملة أَ كما بشكل (٧) :



شكل (٧)

مثال (٢٢) :

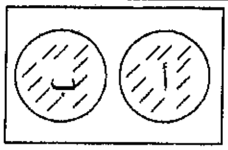
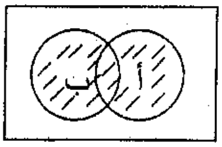
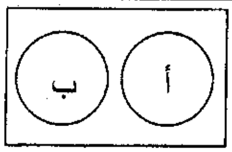
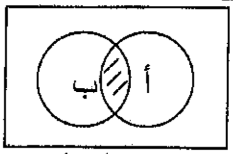
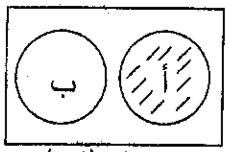
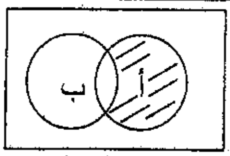
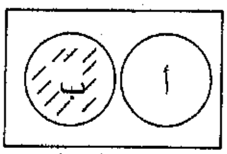
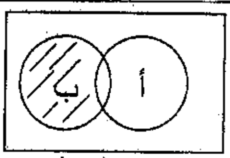
إذا كان لديك الفئتان أ ، ب فأوجد باستخدام أشكال فن اتحاد الفئتين ، تقاطع الفئتين ، الفرق بين الفئتين. وذلك إذا كان :

(أ) أ ∩ ب = $\varnothing$

(ب) أ ∩ ب $\neq \varnothing$

الحـــــل

الجزء المظلل في أشكال فن التالية يمثل الإجابة.

	$أ \cap ب = \emptyset$	$أ \cap ب \neq \emptyset$
اتحاد الفئتين (أ ∪ ب)	 شكل (٨)	 شكل (١١)
تقاطع الفئتين (أ ∩ ب)	 شكل (١٠)	 شكل (١١)
الفرق بين الفئتين (أ – ب)	 شكل (١٢)	 شكل (١٣)
الفرق بين الفئتين (ب – أ)	 شكل (١٤)	 شكل (١٥)

نظرية (١) :

إذا كانت شـ الفئة الشاملة و **أ** ، **ب** ، **ج** ثلاث فئات فإنها تحقق قوانين جبر الفئات التالية :

قوانين حيادية القوة (Idempotent laws) :

$$أ \cup أ = أ \quad ، \quad أ \cap أ = أ$$

قوانين الترابط (Associative laws) :

$$(أ \cup ب) \cup ج = أ \cup (ب \cup ج)$$

$$(أ \cap ب) \cap ج = أ \cap (ب \cap ج)$$

قوانين الابدال (Commutative laws) :

$$أ \cup ب = ب \cup أ \quad ، \quad أ \cap ب = ب \cap أ$$

قوانين التوزيع (Distributive laws) :

$$أ \cup (ب \cap ج) = (أ \cup ب) \cap (أ \cup ج)$$

$$أ \cap (ب \cup ج) = (أ \cap ب) \cup (أ \cap ج)$$

الفئات المحايدة (Identity laws) :

$$أ \cup \varnothing = أ \quad ، \quad أ \cap ش = أ$$

$$أ \cup ش = ش \quad ، \quad أ \cap \varnothing = \varnothing$$

قوانين الفئات المكملة (Complement laws) :

$$أ \cup أ' = ش \quad ، \quad أ \cap أ' = \varnothing$$

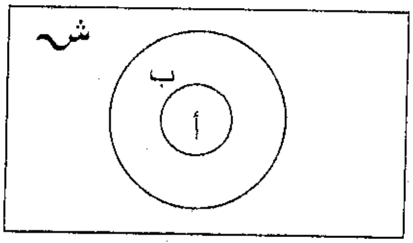
$$(أ')' = أ \quad ، \quad ش' = \varnothing \quad ، \quad \varnothing' = ش$$

قوانين دي مورجان (De Morgan's laws) :

$$(أ \cup ب)' = أ' \cap ب' \quad ، \quad (أ \cap ب)' = أ' \cup ب'$$

نظرية (٢) :

أ ⊂ ب إذا وفقط إذا كان :



(١) أ ∩ ب = أ

(٢) ب′ ⊂ أ′

(٣) ب ∪ أ′ = ش

(٤) أ ∪ ب = ب

(٥) أ ∩ ب′ = ∅

مثال (٢٢) :

أوجد الفئة التي تحتوي على جميع الفئات الجزئية الممكن تكوينها من الفئة : أ = { ١ ، ٢ ، ٣ }

الحـــــل

من الفئة أ يمكن تكوين الفئات الجزئية التالية :

∅ ، {١} ، {٢} ، {٣} ، {١ ، ٢} ، {١ ، ٣} ، {٢ ، ٣} ، {١ ، ٢ ، ٣}

وتعرف الفئة التي تحتوي على جميع هذه الفئات الجزئية بفئة القوى (Power set) ويرمز لها بالرمز ق يتبعه الرمز الخاص بالفئة. ففي هذا المثال تكون فئة القوى لهذه الفئة هي :

ق (أ) = { ∅ ، {١} ، {٢} ، {٣} ، {١ ، ٢} ، {١ ، ٣} ، {٢ ، ٣} ، {١ ، ٢ ، ٣} }

كما علينا أن نلاحظ أن هذه الفئة تشمل ٨ عناصر ، وكقاعدة عامة إذا كانت الفئة الأصلية تشمل "ن" عنصر فإن فئة القوى لابد أن تشمل $(٢)^{ن}$ عنصر.

مثال (٢٣) :

بفرض أن :

أ = { س ، ص ، ع } ، ب = { س ، ص } ، ج = { ع ، ل }

د = { ل} ، هـ = { س ، ص ، ل }

فأي من هذه العبارات صحيحة وأي منها خاطئة :

(١) ب ⊂ أ (٢) ج ≠ هـ (٣) ء ⊂ هـ

(٤) د ⊂ أ (٥) أ = ج

الحـل

(١) (صحيحة) : لأن كل عنصر في ب ينتمي إلى أ.

(٢) (صحيحة) : لوجود عناصر في هـ لا تنتمي إلى ج.

(٣) (صحيحة) : لأن العنصر الوحيد الموجود في د ينتمي أيضاً إلى هـ.

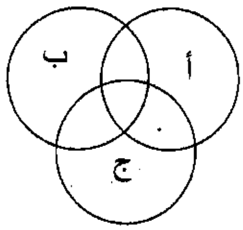
(٤) (خـاطئة) : لوجود عنصر في د لا ينتمي إلى أ.

(٥) (خـاطئة) : لوجود عناصر في أ لا تنتمي إلى ج (أو العكس).

مثال (٢٣) :

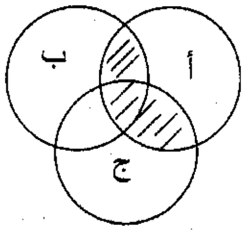
في شكل فن الآتي ظلل :

(١) أ $\cap$ (ب $\cup$ ج). (٢) (أ $\cap$ ب) $\cup$ (أ $\cap$ ج)

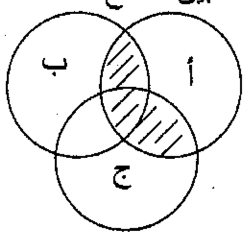


الحـــل

(١) أ $\cap$ (ب $\cup$ ج) : تتكون من جميع العناصر الموجودة في كل من ب ، ج وتنتمي إلى أ.



(٢) (أ $\cap$ ب) $\cup$ (أ $\cap$ ج) : تتكون من العناصر المشتركة بين أ ، ب يضاف إليها العناصر المشتركة بين أ ، ج



ونلاحظ أن : أ $\cap$ (ب $\cup$ ج) = (أ $\cap$ ب) $\cup$ (أ $\cap$ ج)

ضرب الفئات :

نفرض أن أ ، ب فئتان ، فإن حاصل ضرب الفئتين أ ، ب يكتب بالصورة التالية : أ × ب ويتكون من جميع الأزواج المرتبة (أ ، ب) حيث أ ∈ أ ، ب ∈ ب

أي أن **أ** × **ب** = { (أ ، **ب**) : أ ∈ أ ، **ب** ∈ **ب**}

مثال (٢٤) :

أوجد حاصل ضرب الفئتين أ × ب حيث :

أ = { ١ ، ٢ ، ٣ } ، ب = { س ، ص }

الحـــل

أ × ب = {(١ ، س) ، (١ ، ص) ، (٢ ، س) ، (٢ ، ص) ، (٣ ، س) ، (٣ ، ص)}

مثال (٢٥) :

أوجد الفئة أ × ب × ج إذا كانت :

أ = {س ، ص} ، ب = {١ ، ٢ ، ٣} ، ج = {ع ، ل}

الحـــل

أ × **ب** × **ج** = {(س ، ١ ، ع) ، (س ، ١ ، ل) ، (س ، ٢ ، ع) ، (س ، ٢ ، ل) ، (س ، ٣ ، ع) ، (س ، ٣ ، ل) ، (ص ، ١ ، ع) ، (ص ، ١ ، ل) ، (ص ، ٢ ، ع) ، (ص ، ٢ ، ل) ، (ص ، ٣ ، ع) ، (ص ، ٣ ، ل)}

مثال (٢٦) :

بفرض أن : أ = {س ، ص} ، ب = {١، ٢} ، ج = {٢ ، ٣}

فأوجد :

(١) أ × (ب ∪ ج) (٢) (أ × ب) ∪ (أ × ج)

(٣) أ × (ب ∩ ج) (٤) (أ × ب) ∩ (أ × ج)

الحـــل

(١) أ × (ب ∪ ج)

= {س ،ص} × {١ ، ٢ ، ٣} = {(س،١)،(س،٢)،(س،٣)،(ص،١)، (ص،٢) ، (ص،٣)}

(٢) (أ × ب) ∪ (أ × ج)

={(س،١)،(س،٢)،(ص،١)،(ص،٢)}∪{(س،٢)،(س،٣)،(ص،٢)،(ص،٣)}

= {(س،١)،(س،٢)،(س،٣)،(ص،١)،(ص،٢)،(ص،٣)}

يلاحظ من (١) ، (٢) أن :

أ × (ب ∪ ج) = (أ × ب) ∪ (أ × ج)

(٣) أ × (ب ∩ ج) = {س ، ص} × {٢}

= {(س ، ٢) ، (ص ، ٢)}

(٤) (أ × ب) ∩ (أ × ج)

= {(س،١)،(س،٢)،(ص،١)،(ص،٢)}∩{(س،٢)،(س،٣)،(ص،٢)،(ص،٣)}

= { (س ، ٢) ، (ص ، ٢) }

مثال (٢٧) :

اختبرت عينة عشوائية مكونة من ٦٠ طالب من طلبة السنة الأولى في جامعة عين شمس وتم تصنيفهم على حسب الكلية التي التحق بها كل منهم والشعبة التي كان بها في الثانوية العامة ووضعت النتائج في الجدول الآتي :

الشعبة / الكلية	علمي (د)	أدبي (هـ)	رياضة (و)	المجموع
التجارة (أ)	١٧	٥	٣	٢٥
الحقوق (ب)	٨	١٠	٢	٢٠
الاقتصاد (ج)	٤	٦	٥	١٥
المجموع	٢٩	٢١	١٠	٦٠

والمطلوب : توضيح معنى الرموز الآتية وأوجد قيمة كل منها :

(١) أ (٢) أ′ (٣) و (٤) و′

(٥) أ ∩ د (٢) (أ ∩ د)′ (٧) أ ∪ د (٨) (أ ∪ د)′

(٩) أ ∩ د′ (١٠) هـ′ ∩ ج (١١) هـ′ ∩ ج′ (١٢) ب′ ∪ هـ′

(١٣) أ ∩ ج (١٤) أ ∪ ج (١٥) هـ − ب

الحـــل

(١) أ = فئة الطلبة الذين التحقوا بكلية التجارة = ٢٥ طالب

(٢) أَ = فئة الطلبة الذين لم يلتحقوا بكلية التجارة

شـ – أ = ٦٠ – ٢٥ = ٣٥ طالب

(٣) و = فئة الطلبة من شعبة الرياضة = ١٠ طالب

(٤) وَ فئة الطلبة من أي شعبة بخلاف شعبة الرياضة

شـ – و = ٦٠ – ١٠ = ٥٠ طالب

(٥) أ ⋂ د = فئة الطلبة من كلية التجارة وفي نفس الوقت علمي

= تقاطع التجارة مع العلمي = ١٧ طالب

(٦) (أ ⋂ د)َ = فئة الطلبة ليسوا من كلية التجارة وفي نفس الوقت علمي

= شـ – (أ ⋂ د)

= ٦٠ – ١٧ – ٤٣ طالب

(٧) أ ⋃ د = فئة الطلبة من كلية التجارة أو من القسم العلمي

= أ + د – (أ ⋂ د)

= ٢٥ + ٢٩ – ١٧ = ٣٧ طالب

(٨) (أ ⋃ د)َ = فئة الطلبة الذين ليسوا من كلية التجارة أو علمي

= شـ – (أ ⋃ د)

= ٦٠ – ٣٧ = ٢٣ طالب

(٩) أ ∩ د′ = فئة الطلبة من كلية التجارة وفي نفس الوقت ليسوا من القسم العلمي

= أ − د

= العناصر الموجودة في أ وغير موجودة في د

= ٢٥ − ١٧ = ٨ طلاب

(أو حل آخر : ٥ + ٣ = ٨ طلاب)

(١٠) هـ′ ∩ ج = ج ∩ هـ′

= فئة الطلبة من كلية الاقتصاد وفي نفس الوقت ليسوا أدبي

= ج − هـ

= ١٥ − ٦ = ٩ طلاب

(أو حل آخر : ٤ + ٥ = ٩ طلاب)

(١١) هـ′ ∩ ج′ = فئة الطلبة الذين ليسوا أدبي وليسوا من كلية الاقتصاد

= (هـ ∪ ج)′

= ش − (هـ ∪ ج)

= ش − [هـ + ج − (هـ ∩ ج)]

= ٦٠ − (٢١ + ١٥ − ٦)

٦٠ − (٣٠) = ٣٠ طالباً

(١٢) بَ ∪ هـَ = فئة الطلبة ليسوا من كلية الحقوق أو ليسوا أدبي

= (ب ∩ هـ)َ

= شـ − (ب ∩ هـ)

= ٦٠ − ١٠ = ٥٠ طالباً

(١٣) أ ∩ ج = فئة الطلبة الذين التحقوا بكلية التجارة وفي نفس الوقت التحقوا بكلية الاقتصاد وحيث أنه لا يوجد طلبة التحقوا بكليتين معاً

أولاً يوجد تقاطع بين أ ، ج

∴ أ ∩ ج = ∅

وعدد الطلبة = صفر

(١٤) أ ∪ ج = فئة الطلبة الذين التحقوا بكلية التجارة أو التحقوا بكلية الاقتصاد

= أ + ج − (أ ∩ ج)

= ٢٥ + ١٥ − صفر = ٤٠ طالباً

(١٥) هـ − ب = فئة الطلبة الأدبي الذين لم يلتحقوا بكلية الحقوق

= ٢١ − ١٠ = ١١ طالباً

مثال (٢٨) :

في إحدى قاعات البحث التي تحتوي على ٥٠ طالب وجد منهم :

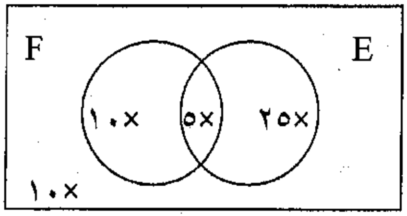
٣٠ طالب يجيد التحدث باللغة الإنجليزية، ١٥ طالب يجيد التحدث باللغة الفرنسية، ٥ طلبة يجيدون التحدث باللغتين معاً. والمطلوب باستخدام شكل فن إيجاد :

(١) عدد الطلبة الذين يجيدون التحدث بلغة واحدة فقط.

(٢) عدد الطلبة الذين يجيدون التحدث بلغة واحدة على الأقل.

(٣) عدد الطلبة الذين لا يتحدثون اللغتين.

الحـــــل



(١) عدد الطلبة الذين يجيدون لغة واحدة فقط = ٢٥ + ١٠ = ٣٥ طالب

(٢) عدد الطلبة الذين يتحدثون لغة واحدة على الأقل = ٢٥ + ٥ + ١٠ = ٤٠ طالب

(٣) عدد الطلبة الذين لا يتحدثون اللغتين = ١٠ طلبة.

مثال (٢٩) :

قامت إدارة أحد النوادي الرياضية بعمل دراسة لمعرفة الرياضة الأكثر تفضيلاً بين زواد هذا النادي، فاختارت عينة عشوائية من ١٠٠٠ شاب من الأعضاء الذين تتراوح أعمارهم بين ١٥ و ٢٥ سنة، فكانت العينة تحتوي على ما يلي :

٣٠٠ عضو يفضل كرة السلة ، ٥٠٠ عضو يفضل كرة القدم،

١٥٠ عضو يفضل التنس ، ٢٠٠ يفضلون كرة السلة وكرة القدم،

٥٠ يفلون كرة السلة والتنس ، ٧٥ يفضلون كرة القدم والتنس.

٥٠ يفضلون الألعاب الثلاثة.

والمطلوب : تمثيل نتائج الدراسة بيانياً من خلال شكل فن ، ثم أوجد الأعداد التالية :

(١) عدد الذين يفضلون : كرة السلة فقط، كرة القدم فقط، التنس فقط.

(٢) عدد الذين يفضلون لعبة واحدة فقط.

(٣) عدد الذين يفضلون : كرة السلة والقدم فقط، كرة السلة والتنس فقط، كرة القدم والتنس فقط.

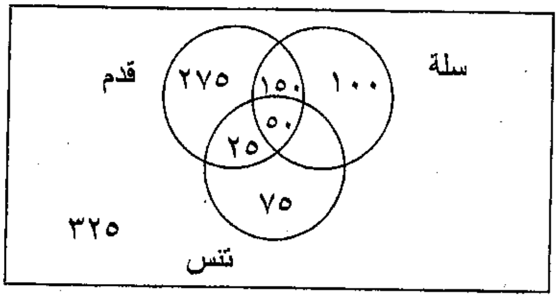
(٤) عدد الذين يفضلون لعبتين اثنين فقط.

(٥) عدد الذين يفضلون لعبتين اثنين على الأقل.

(٦) عدد الذين لا يفضلون أي من الألعاب الثلاثة.

(٧) عدد الذين يفضلون لعبة واحدة على الأكثر.

الحـــل



(١) عدد الذين يفضلون
كرة سلة فقط = ١٠٠ عضو
كرة قدم فقط = ٢٧٥ عضو
تنس فقط = ٧٥ عضو

(٢) عدد الذين يفضلون لعبة واحدة فقط = ١٠٠ + ٢٧٥ + ٧٥

= ٤٥٠ عضو

(٣) عدد الذين يفضلون
- كرة السلة والقدم فقط = ١٥٠ عضو
- كرة السلة والتنس فقط = لا يوجد
- كرة القدم والتنس فقط= ٢٥ عضو

(٤) عدد الذين يفضلون لعبتين اثنين فقط = ١٥٠ + ٢٥ = ١٧٥ عضو

(٥) عدد الذين يفضلون لعبتين اثنين على الأقل = ١٥٠ + ٥٠ + ٢٥ + ٧٥

= ٣٠٠ عضو

(٦) عدد الذين لا يفضلون أي من الألعاب الثلاثة = ٣٢٥ عضو

(٧) عدد الذين يفضلون لعبة واحدة على الأكثر = ١٠٠ + ٢٧٥ + ٧٥ + ٣٢٥

= ٧٧٥ عضو

تمارين

١- اكتب الفئات التالية باستخدام طريقة السرد "القائمة" :

ع = { س : س^{٢} - ٧ س + ١٢ = ٠} ، ل = {س : ٥ س + ٧ = ٢٧}،

م = { س : س^{٤} = ٨١}.

٢- إذا كانت : شـ = {س : س عدد صحيح فردي موجب} ،

أ = {٦،٥،٣،١١،٧} فاثبت أن أ $\not\subset$ ش.

٣- إذا كانت الفئة الشاملة شـ والفئات أ ، ب ، ج كالتالي :

شـ = { ١ ، ٣ ، ٥ ، ٩ ، ١٢ ، ١٧} ، أ = { ١ ، ٣ ، ٩}

ب = { ١ ، ٩} ، ج = { ٥ ، ٩ ، ١٧}

فأوجد :

(أ) أ´ ، ب´ ، جـ´

(ب) أ $\cup$ ب ، أ $\cap$ ب ، (أ $\cap$ ب)´

(ج) أ - ب ، (ب - ج) $\cap$ أ.

٤- باستخدام أشكال فن حقق صحة قوانين دي مورجان Demorgans laws الآتية :

(أ) (أ $\cap$ ب)´ = أ´ $\cup$ ب´

(ب) (أ $\cup$ ب)´ = أ´ $\cap$ ب´

٥- اكتب جميع الفئات الجزئية الممكنة للفئة الشاملة الآتية :

شـ = { ٢ ، ٤ ، ٦ }

٦- يعمل بأحد المصانع ٥٠٠ موظف وقد حصل منهم ٣٥٠ على علاوة دورية، وتم ترقية ١٠٠ موظف ، كما حصل على علاوة وترقية معاً ٥٠ موظف. فكم عدد الموظفين الذين لم يحصلوا على علاوة أو ترقية.

٧- إذا كانت : أ = { ٢ ، ٤ ، ٦ } ، ب = { ٣ ، ٧ }

فأوجد فئات حاصل الضرب الآتية : أ × ب ، ب × أ ، $أ^{٢}$ ، $ب^{٢}$.

٨- إذا كانت : أ = { ١ ، ٢ ، ٣ } ، ب = { ٥ ، ٧ } ، ج = { ١ ، ٥ ، ٨ }

فأوجد فئات حاصر الضرب الآتية :

أ × ب ، أ × ج ، أ × ب × ج ، أ × ب × أ ، $أ^{٢}$ ، $ب^{٢}$.

٩- أرسم شكل فن الذي يمثل العلاقات التالية :

(أ) أ ⊂ ب ⊂ ش

(ب) أ ، ب ⊂ ش ، أ ∩ ب = ∅

(ج) ج ⊂ ب ، ب ⊂ أ.

١٠- ارسم أشكال فن للثلاث فئات غير الخالية أ ، ب ، ج في كل مما يأتي :

(أ) أ ⊂ ج ، أ ≠ ج ، ب ∩ ج = ∅

(ب) أ ⊂ ب ، ج ⊂ ب ، أ ∩ ج = ∅

(ج) أ ⊂ (ب ∩ ج) ، ب ⊂ ج ، ج ≠ ب ، أ ≠ ج

(د) أ ⊂ ب ، ج ⊄ ب ، أ ∩ ج ≠ ∅

١١- أوجد فئة القوى ق (أ) للفئة أ = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ }

وكذلك فئة القوى ق (ب) للفئة ب = { ٥ ، ٦ ، ٨ }

١٢- إذا كانت

ش = { أ ، ب ، ج ، ء ، هـ ، و ، ز }

أ = { أ ، ب ، ج ، ء ، هـ } ، ب = { أ ، ج ، هـ ، ز } ، ج = { ب ، هـ ، و ، ز }

فأوجد كلاً من :

(أ) أ − ب′ (ب) أ ∩ جـ′ (ج) ب − ج (د) ج ∪ أ

(هـ) (ب′ ∩ أ)′ (و) (أ − ج)′ (ز) ب′ ∩ أ (ح) ب ∩ أ

١٣- إذا كانت :

أ = { ١،٢،٥،٦ } ، ب { ١،٣،٦ } ، ج = { ١،٢،٤،٦ }

فأوجد كلاً من :

(أ) أ × ب (ب) أ × (ب ∩ ج)

(ج) أ × ج (د) (أ × ب) ∩ (أ × ج)

١٤- إذا كانت الفئة أ = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ } بين أي من الفئات التالية تجزئ للفئة أ.

(أ) {{١} ، {٢} ، {٣} ، {٤}} . (ب) {{٤} ، {١ ، ٢}}

(ج) {{١ ، ٢ ، ٣} ، {٣ ، ٤}} (د) {{١ ، ٢} ، {٣} ، {٢ ، ٤}}

ثم احسب عدد التجزيئات التي يمكن تكوينها للفئة أ.

١٥- يقوم أحد مراكز علاج السرطان بعمل دراسة عن تأثير العوامل الثلاثة (التدخين، الكحوليات، تعاطي المخدرات) على الإصابة بالمرض ، فأخذت عينة عشوائية من ٢٠٠٠ مصاب، وتم تصنيف البيانات كالتالي :

١٤٥٠ مدخن ، ١٢٥٠ مدمن كحوليات ، ١٥٠٠ يتعاطى مخـدرات ، ١١٠٠ مدخن ومدمن كحوليات ، ١٢٠٠ مـدخن ومـدمن مخـدرات، ١٠٠٠ مـدمن كحوليات ومخدرات، ٤٠٠ مدخن ومدمن كحوليات ومخدرات.

والمطلوب : رسم شكل فن لتمثيل الفئات السابقة ، ثم أوجد ما يلي :

(أ) عدد المصابين المدخنين فقط.

(ب) عدد المصابين مدمنين الكحوليات فقط.

(ج) عدد المصابين مدمنين المخدرات فقط.

(د) عدد المصابين بالمرض بسبب عامل واحد فقط من الثلاثة.

(هـ) عدد المصابين بسبب عاملين اثنين فقط.

(و) عدد المصابين بسبب عاملين اثنين على الأقل.

(ز) عدد المصابين بالمرض لأي سبب آخر بخلاف الأسباب الثلاثة السابقة.

(ح) عدد المصابين بالمرض بسبب عامل واحد فقط على الأقل.

الباب الخامس

المحــــــددات

يمكن تعريف المحدد بأنه عبارة عن مجموعة من القيم مرتبة في عدة صفوف وعدة أعمدة، بحيث يكون عدد الصفوف وعدد الأعمدة متساو، ويحدها خطين رأسيين متوازيين. ويرمز لقيمة المحدد بالرمز Δ وتنطق دلتا وتتحدد رتبة المحدد وفقاً لعدد صفوفه وعدد أعمدته.

ونتعرف فيمايلي على المحددات ذات الرتب المختلفة.

المحدد من الرتبة الثانية:

يأخذ المحدد من الرتبة الثانية الشكل التالي:

$$\begin{vmatrix} أ_{٢١} & أ_{١١} \\ أ_{٢٢} & أ_{١٢} \end{vmatrix}$$

هذا المحدد يتكون من صفين وعمودين وكل صف أو عمود في هـــذا المحـــدد يشتمل على عنصرين كمايلي:

الـــصف الأول عبـــارة عـــن ($أ_{١١}$ $أ_{٢١}$) والـــصف الثـــانى عبـــارة عـــن ($أ_{١٢}$ $أ_{٢٢}$) والعمود الأول عبارة عن $\begin{vmatrix} أ_{١١} \\ أ_{١٢} \end{vmatrix}$ والعمود الثـــانى عبـــارة عـــن

$$\begin{vmatrix} أ_{٢١} \\ أ_{٢٢} \end{vmatrix}$$

المحدد من الرتبة الثالثة :

يأخذ المحدد من الرتبة الثالثة الشكل التالى : $\begin{vmatrix} \text{أ}_{\text{٣١}} & \text{أ}_{\text{٢١}} & \text{أ}_{\text{١١}} \\ \text{أ}_{\text{٣٢}} & \text{أ}_{\text{٢٢}} & \text{أ}_{\text{١٢}} \\ \text{أ}_{\text{٣٣}} & \text{أ}_{\text{٢٣}} & \text{أ}_{\text{١٣}} \end{vmatrix}$

هذا المحدد يتكون من ثلاث صفوف وثلاث أعمدة، وكل صف أو عمود فى هذا المحدد يشتمل على ثلاث عناصر كمايلى:

الصف الأول عبارة عن $(\text{أ}_{\text{١١}} \quad \text{أ}_{\text{٢١}} \quad \text{أ}_{\text{٣١}})$ ، والصف الثانى عبارة عن $(\text{أ}_{\text{١٢}} \quad \text{أ}_{\text{٢٢}} \quad \text{أ}_{\text{٣٢}})$، والصف الثالث عبارة عن $(\text{أ}_{\text{١٣}} \quad \text{أ}_{\text{٢٣}} \quad \text{أ}_{\text{٣٣}})$

والعمود الأول عبارة عن $\begin{vmatrix} \text{أ}_{\text{١١}} \\ \text{أ}_{\text{١٢}} \\ \text{أ}_{\text{١٣}} \end{vmatrix}$ ، والعمود الثانى عبارة عن $\begin{vmatrix} \text{أ}_{\text{١٢}} \\ \text{أ}_{\text{٢٢}} \\ \text{أ}_{\text{٢٣}} \end{vmatrix}$ والعمود الثالث عبارة عن $\begin{vmatrix} \text{أ}_{\text{٣١}} \\ \text{أ}_{\text{٣٢}} \\ \text{أ}_{\text{٣٣}} \end{vmatrix}$.

ويقال على المحدد الذى يحتوى على أربع صفوف وأربع أعمدة محدد من الرتبة الرابعة، كما يقال على المحدد الذى يحتوى على خمس صفوف وخمس أعمدة محدد من الرتبة الخامسة وهكذا.

وهناك عدة طرق لايجاد قيمة المحدد (Δ) من أى رتبة منها طريقة المرافقات وطريقة الأقطار المتوازية.

- **إيجاد قيمة المحدد من الرتبة الثانية:**

بفرض أنه مطلوب إيجاد قيمة (مفكوك) محدد الرتبة الثانية التالى:

$$\begin{vmatrix} أ_{٢١} & أ_{١١} \\ أ_{٢٢} & أ_{١٢} \end{vmatrix}$$

القطر الفرعى   القطر الرئيسى

فإن قيمة المحدد (Δ) = حاصل ضرب عناصر القطر الرئيسى − حاصل ضرب عناصر القطر الفرعى

مثال (١) :

أوجد قيمة المحددات التالية:

(أ)

$$\begin{vmatrix} ٢ & ٣ \\ ٦ & ٤ \end{vmatrix}$$

القطر الفرعى   القطر الرئيسى

Δ = (٣ × ٦) − (٢ × ٤)

= ١٨ − ٨ = ١٠

(ب)

$$\begin{vmatrix} ٦- & ٥ \\ ٨ & ٢ \end{vmatrix}$$

القطر الفرعى   القطر الرئيسى

Δ = (٥ × ٨) − (−٦ × ٢)

= ٤٠ − (−١٢) = ٤٠ + ١٢ = ٥٢

(ج) $\begin{vmatrix} -٥ & -٦ \\ ٤ & ٢ \end{vmatrix}$

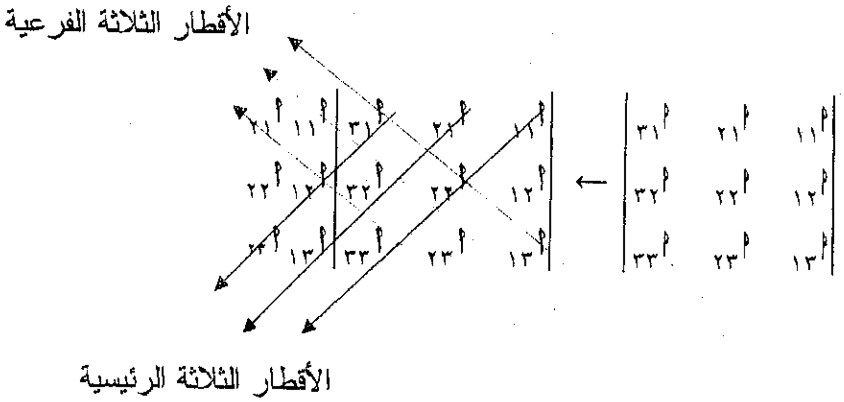
$\Delta = (-٥ \times ٢) - (-٦ \times ٤)$

$= -١٠ \quad - (-٢٤) = -١٠ + ٢٤ = ١٤$

- **إيجاد قيمة المحدد من الرتبة الثالثة:**

أولاً : باستخدام طريقة الأقطار المتوازية:

تكون قيمة المحدد عبارة عن مجموع حواصل ضرب عناصر الأقطار الرئيسية الثلاثة ناقص مجموع حواصل ضرب عناصـــر الأقطـــار الفرعيـــة الثلاثـــة، ونتحصل على هذه الأقطار بإضافة عمودين مماثلين للعمـــودين الأول والثـــانى على الترتيب.



فإن قيمة المحدد (Δ) =

$$\left[\text{أ}_{١١}\times\text{أ}_{٢٢}\times\text{أ}_{٣٣}+\text{أ}_{٢١}\times\text{أ}_{٣٢}\times\text{أ}_{١٣}+\text{أ}_{٣١}\times\text{أ}_{١٢}\times\text{أ}_{٢٣}\right] -$$

$$\left[\text{أ}_{١٣}\times\text{أ}_{٢٢}\times\text{أ}_{٣١}+\text{أ}_{٢٣}\times\text{أ}_{٣٢}\times\text{أ}_{١١}+\text{أ}_{٣٣}\times\text{أ}_{١٢}\times\text{أ}_{٢١}\right]$$

مثال (٢) :

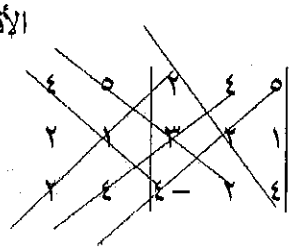
أوجد قيمة المحدد التالى باستخدام طريقة الأقطار المتوازية :

$$\begin{vmatrix} ٢ & ٤ & ٥ \\ ٣ & ٢ & ١ \\ ٤- & ٢ & ٤ \end{vmatrix}$$

الحـــــل

لايجاد قيمة المحدد باستخدام طريقة الأقطار المتوازية نعيد كتابة المحدد الأصلى ثم ننقل العمودين الأول والثانى مرة أخرى على يسار المحدد كمايلى:

الأقطار الفرعية



الأقطار الرئيسية

مفكوك المحدد (Δ) = $[(٢\times١\times٢)+(٤\times٣\times٤)+(٤-\times٢\times٥)]$ -

$$[(٤\times١\times٤-)+(٥\times٣\times٢)+(٢\times٢\times٤)]$$

$$[(١٦-٣٠+١٦)-(٤+٤٨+٤٠-)] \;=$$

$$١٨- = [(٣٠)-(١٢)] \;=$$

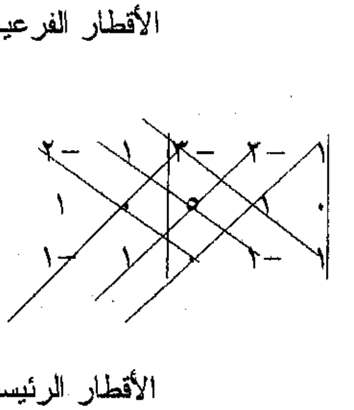
مثال (٣):

أوجد مفكوك المحدد التالى باستخدام طريقة الأقطار المتوازية:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

الحـــــل

لايجاد قيمة المحدد باستخدام طريقة الأقطار المتوازية نعيد كتابة المحدد الأصلى ثم ننقل العمودين الأول والثانى مرة أخرى على يسار المحدد كمايلى:



مفكوك المحدد $(\Delta) = [(1\times1\times0)+(-2\times5\times1)+(-3\times0\times-1)] -$
$[(1\times1\times-3)+(-1\times5\times1)+(0\times0\times-2)]$

$= [(0-10+0)-(-3-5+0)]$

$= -10-(-8) = -10+8 = -2$

ثانياً: إيجاد قيمة المحدد باستخدام طريقة المرافقات :

بفرض أن لدينا محدد الرتبة الثالثة التالى ونرغب فى تحديد قيمته:

$$\begin{vmatrix} \text{أ}_{١١} & \text{أ}_{٢١} & \text{أ}_{٣١} \\ \text{أ}_{١٢} & \text{أ}_{٢٢} & \text{أ}_{٣٢} \\ \text{أ}_{١٣} & \text{أ}_{٢٣} & \text{أ}_{٣٣} \end{vmatrix}$$

فيمكن إيجاد قيمة هذا المحدد بطريقة المرافقات وفقاً للخطوات التالية:

(١) تحديد الإشارات للمحدد كمايلى $\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$ ويلاحظ أن الإشارات تبادليـــة لكل صف أو عمود.

(٢) يتم إيجاد مرافق كل عنصر من عناصر أحد الصفوف (أو الأعمدة) ولـــيكن الصف الأول كمايلى:

* يتم إيجاد مرافق العنصر الأول من الصف الأول ($\text{أ}_{١١}$) بإلغـــاء بـــاقى عناصر كل من الصف والعمود فيكون المرافق:

$$\text{مرافق } \text{أ}_{١١} = \begin{vmatrix} \text{أ}_{٢٢} & \text{أ}_{٣٢} \\ \text{أ}_{٢٣} & \text{أ}_{٣٣} \end{vmatrix}$$

** يتم إيجاد مرافق العنصر الثانى من الصف الأول ($\text{أ}_{٢١}$) أيضاً بعد حذف باقي عناصر الصف والعمود فيكون المرافق:

$$\text{مرافق } \text{أ}_{٢١} = \begin{vmatrix} \text{أ}_{١٢} & \text{أ}_{٣٢} \\ \text{أ}_{١٣} & \text{أ}_{٣٣} \end{vmatrix}$$

***وبنفس الطريقة يمكن إيجاد مرافق العنصر الثالث مـن الـصف الأول ($أ_{٣١}$) بعد حذف باقى عناصر الصف والعمود فيكون المرافق :

$$\text{مرافق } أ_{٣١} = \begin{vmatrix} أ_{٢٢} & أ_{١٢} \\ أ_{٢٣} & أ_{١٣} \end{vmatrix}$$

(٣) يتم إيجاد قيمة المحدد وفقاً للقانون التالى:

قيمة المحدد (Δ) = (العنصر الأول فى الصف الأول × مرافق هذا العنصر)− (العنصر الثانى فى الصف الأول × مرافق هذا العنصر) + (العنصر الثالث فى الصف الأول × مرافق هذا العنصر).

أى أن $(\Delta) = أ_{١١}\begin{vmatrix} أ_{٣٢} & أ_{٢٢} \\ أ_{٣٣} & أ_{٢٣} \end{vmatrix} - أ_{٢١}\begin{vmatrix} أ_{٣٢} & أ_{١٢} \\ أ_{٣٣} & أ_{١٣} \end{vmatrix} + أ_{٣١}\begin{vmatrix} أ_{٢٢} & أ_{١٢} \\ أ_{٢٣} & أ_{١٣} \end{vmatrix}$

مثال (٤):

أوجد قيمة المحدد التالى باستخدام طريقة المرافقات:

$$\begin{vmatrix} ٤ & ١ & ٣ \\ ٣ & ٢ & ١ \\ ٢ & ٤ & ٢ \end{vmatrix}$$

الحــــل

$$\Delta = ٣\begin{vmatrix} ٣ & ٢ \\ ٢ & ٤ \end{vmatrix} - ١\begin{vmatrix} ٣ & ١ \\ ٢ & ٢ \end{vmatrix} + ٤\begin{vmatrix} ٢ & ١ \\ ٤ & ٢ \end{vmatrix}$$

$$= ٣\,(٤-١٢) - ١\,(٢-٦) + ٤\,(٤-٤)$$

$$= ٣\,(-٨) - ١\,(-٤) + ٤\,(٠) \quad = -٢٤ + ٤ = -٢٠$$

مثال (٥):

أوجد قيمة المحدد التالى باستخدام طريقة المرافقات:

$$\begin{vmatrix} 7 & -2 & -2 \\ 3 & 1 & 2 \\ -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}$$

الحـــــل

$$\Delta = 7\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} - (-2)\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -5 & -3 \end{vmatrix} + (-2)\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -5 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 7(-3-6) + 2\,[-9-(-10)] - 2\,[9-(-5)]$$

$$= 7(-9) + 2\,[-9+10] - 2\,[9+5]$$

$$= -63 + 2\,(1) - 2\,(14)$$

$$= -63 + 2 - 28 = -89$$

مثال (٦):

أوجد قيمة المحدد التالى بطريقتين مختلفتين:

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \\ 5 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

الحـــــل

(*) إيجاد مفكوك المحدد بطريقة الأقطار المتوازية:

الأقطار الفرعية

$$\begin{array}{cc|ccc|} ٣ & ١- & ٠ & ٣ & ١- \\ ١ & ٢ & ٤ & ١ & ٢ \\ ٢ & ٥ & ١ & ٢ & ٥ \end{array}$$

الأقطار الرئيسية

مفكوك المحدد $(\Delta) = \left[(-١\times١\times١)+(٣\times٤\times٥)+(٠\times٢\times٢)\right] -$

$\left[(٥\times١\times٠)+(٢\times٤\times-١)+(١\times٢\times٣)\right]$

$= \left[-١+٦٠+٠\right]-\left[٠-٨+٦\right] = ٦١$

**** إيجاد مفكوك المحدد بطريقة المرافقات:**

$\Delta = -١ \begin{vmatrix} ١ & ٤ \\ ٢ & ١ \end{vmatrix} - ٣ \begin{vmatrix} ٢ & ٤ \\ ٥ & ١ \end{vmatrix} + ٠ \begin{vmatrix} ٢ & ١ \\ ٥ & ٢ \end{vmatrix}$

$= ١ (١-٨) -٣ (٢-٢٠) + ٠ (٤-٥)$

$= -١ (-٧) - ٣ (-١٨) + ٠$

$= ٧ + ٥٤ = ٦١$

مثال (٧) :

أوجد قيمة س فى المحددات التالية :

(أ) $\begin{vmatrix} \text{٥} & \text{٦} \\ \text{١٠} & \text{٢س} \end{vmatrix} = \text{١٢٠}$

الحـــــل

(٥ × ٢س) − (٦ × ١٠) = ١٢٠

١٠ س − ٦٠ = ١٢٠

١٠ س = ١٢٠ + ٦٠

١٠ س = ١٨٠

س = $\frac{\text{١٨٠}}{\text{١٠}}$ = ١٨

(ب) $\begin{vmatrix} \text{س} & \text{٥} \\ \text{٥} & \text{س} \end{vmatrix} = \text{صفر}$

الحـــــل

(س × س) − (٥ × ٥) = صفر

س^{٢} − ٢٥ = صفر

(س − ٥) (س + ٥) = صفر

أما أن (س − ٥) = صفر أو س + ٥ = صفر

∴ س = ٥ ∴ س = − ٥

(ج) $\begin{vmatrix} س & ٢ \\ س^{٢} & ١ \end{vmatrix}$ = صفر

الحـــل

(س × ١) − (٢ × $س^{٢}$) = صفر

س − ٢ $س^{٢}$ = صفر

س (١ − ٢ س) = صفر (بأخـــذ س عامـــل مشترك)

إما أن س = صفر أو (١ − ٢ س) = صفر

∴ ٢ س = ١

∴ س = $\frac{١}{٢}$

(د) $\begin{vmatrix} (س + ٣) & ١ \\ ٢س & (س + ١) \end{vmatrix}$ = ٣

الحـــل

(س + ٣) (س + ١) − ١ × ٢ س = ٣

($س^{٢}$ + س + ٣ س + ٣) − ٢ س = ٣

$س^{٢}$ + ٤ س + ٣ − ٢ س − ٣ = صفر

$س^{٢}$ + ٢ س = صفر

س (س + ٢) = صفر (بأخذ س عامل مشترك)

أما أن س = صفر أو (س + ٢) = صفر

∴ س = −٢

مثال (٨) :

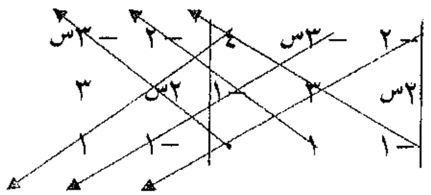
أوجد قيمة س فى المحددات التالية والتى تجعل قيمته تساوى صفر:

(أ) $$\begin{vmatrix} -٢ & -٣\text{س} & ٤ \\ ٢\text{س} & ٣ & -١ \\ -١ & ١ & ٠ \end{vmatrix}$$

الحـــــل

أولاً: يتم إيجاد مفكوك المحدد بطريقة الأقطار المتوازية

الأقطار الفرعية



الأقطار الرئيسية

$$(\Delta) = \left[(-٢\times٣\times٠) + (-٣\text{س}\times-١\times-١) + (٤\times٢\text{س}\times١)\right] -$$
$$\left[(-١\times٣\times٤) + (١\times-١\times-٢) + (٠\times٢\text{س}\times-٣\text{س})\right]$$

= [(٠ − ٣س + ٨س)] − [−١٢ + ٢ + ٠]

= ٥س − (−١٠) = ٥س + ١٠

ثانياً: نساوى قيمة المحدد بالصفر :

٥ س + ١٠ = صفر

٥ س = − ١٠

س = −١٠ / ٥ = −٢

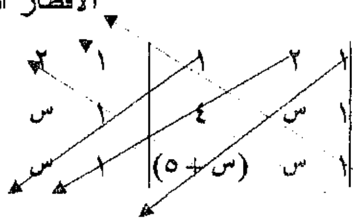
(ب)

١	٢	١
١	س	٤
١	س	(س + ٥)

الحـــل

نقوم بإيجاد قيمة المحدد بطريقة الأقطار المتوازية ثم نساويه بالصفر :

الأقطار الفرعية



الأقطار الرئيسية

(Δ) = [١×س×(س + ٥) + ٢×٤×١ + ١×١×س] −

[١×س×١ + س×٤×١ + (س + ٥)×١×٢]

= [س^{٢} + ٥س + ٨ + س] − [س + ٤س + ٢س + ١٠]

= [س^{٢} + ٦س + ٨] − [٧س + ١٠]

= س^{٢} − س − ٢

ثم نساوى قيمة المحدد بالصفر

∴ س^{٢} − س − ٢ = صفر

(س − ٢) (س + ١) = صفر

∴ س − ٢ = صفر ← س = ٢

أو س + ١ = صفر ← س = −١

خصائص المحددات

نعرض فيمايلى بعض خواص المحددات التى يمكن الاستفادة منها فى تبسيط العمليات الحسابية اللازمة لايجاد قيمة المحددات.

خاصية (١) :

إذا كان جميع عناصر صف ما (أو عمود ما) فى المحدد تساوى صفر فإن قيمة هذا المحدد تساوى صفراً.

فإذا كان لدينا المحدد التالى:

$$\begin{vmatrix} ٠ & ٠ & ٠ \\ ٧ & ٥ & ٢ \\ ٤ & ١- & ٣ \end{vmatrix}$$

فإن قيمة هذ المحدد تساوى صفر وذلك لأنه إذا تم فك هذا المحدد عن طريـــق عناصر الصف الأول فأننا سوف نضرب كل مرافق فى صفر، وبالتالى فأن:

$$\begin{vmatrix} ٥ & ٢ & ٠ \\ ٤ & ٣- & ٠ \\ ٢ & ١ & ٠ \end{vmatrix} = \text{صفر} \quad ، \quad \begin{vmatrix} ٢ & ٣ & ٤ \\ ٠ & ٠ & ٠ \\ ١ & ٢- & ٣ \end{vmatrix} = \text{صفر}$$

خاصية (٢) :

إذا كان هناك صفان أو (عمودان) متطابقان تماماً فإن قيمـــة المحـــدد تساوى صفراً.

$$\begin{vmatrix} ٢ & ١ & ٢ \\ ٤ & ١ & ٤ \\ ٦ & ١ & ٦ \end{vmatrix} = ٢ \begin{vmatrix} ١ & ٤ \\ ١ & ٦ \end{vmatrix} ١- \begin{vmatrix} ٤ & ٤ \\ ٦ & ٦ \end{vmatrix} + ٢ \begin{vmatrix} ٤ & ١ \\ ٦ & ١ \end{vmatrix} = \text{صفر}$$

وكذلك فإن :

$$\begin{vmatrix} ٥ & ١٠ & ١٥ \\ ٢ & ١ & ١ \\ ٥ & ١٠ & ١٥ \end{vmatrix} = \text{صفر} \quad ، \quad \begin{vmatrix} ٣ & ١- & ١- \\ ٤ & ٢- & ٢- \\ ٥ & ٣- & ٣- \end{vmatrix} = \text{صفر}$$

خاصية (٣) :

قيمة المحدد لا تتغير إذا تم تحويل صفوفه إلى أعمدة وأعمدته إلى صفوف.

فإذا كان المحدد أ $= \begin{vmatrix} ١ & ٢ & ٠ \\ ٣ & ٤ & ٥ \\ ٠ & ١ & ٢- \end{vmatrix}$ فإن أَ $= \begin{vmatrix} ١ & ٣ & ٠ \\ ٢ & ٤ & ١ \\ ٠ & ٥ & ٢- \end{vmatrix}$

∴ قيمة المحدد أ = $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$

$= -13 + 12 + 0 = -1$

قيمة المحدد أَ = $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 0 & 5 & -2 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 5 \end{vmatrix}$

$= -13 + 12 + 0 = -1$

نلاحظ أن قيمة المحدد أ تساوى قيمة المحدد أَ ، أى أنه لم تتغير قيمـــة المحـــدد عند تحويل الصفوف إلى أعمدة والأعمدة إلى صفوف.

مثال (٩):

إثبت صحة الخاصية السابقة باستخدام المحددات التالية:

أ $= \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -7 \end{vmatrix}$ ، ب $= \begin{vmatrix} -5 & 7 \\ 2 & 8 \end{vmatrix}$

جـ $= \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix}$ ، ى $= \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \\ 5 & 0 & 2 \end{vmatrix}$

الحــــل

أ $= \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -7 \end{vmatrix} = (2 \times -7) - (3 \times 5) = -14 - 15 = -29$

$$\acute{\text{أ}} = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -7 \end{vmatrix} = (2 \times -7) - (5 \times 3) = -14 - 15 = -29$$

∴ قيمة المحدد أ = قيمة المحدد أَ

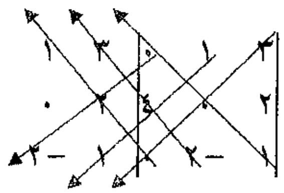
$$\text{ب} = \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = (-5 \times 8) - (7 \times 2) = -40 - 14 = -44$$

$$\acute{\text{ب}} = \begin{vmatrix} -5 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = (-5 \times 8) - (2 \times 7) = -40 - 14 = -44$$

∴ قيمة المحدد ب = قيمة المحدد بَ

الأقطار الفرعية

جـ =



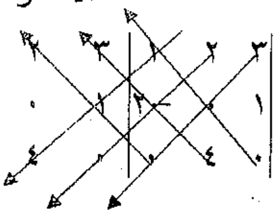
الأقطار الرئيسية

$$\therefore \text{جـ} = [(3\times0\times0)+(1\times4\times1)+(0\times2\times-2)] - [(1\times0\times0)+$$
$$(-2\times4\times3) + (0\times2\times1)]$$

$$= [0 + 4 + 0] - [0 - 24 + 0]$$

$$= 4 \quad + \quad 24 \quad = 28$$

الأقطار الفرعية

جـ = 

الأقطار الرئيسية

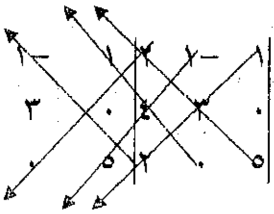
∴ جَ = [(٣×٠×٠) + (٢×–٢×٠) + (١×١×٤)] – [(٠×٠×١) + (٤×–٢×٣) + (٠×١×٢)]

= [٤ + ٠ + ٠] – [٠ – ٢٤ + ٠]

= ٤ + ٢٤ = ٢٨

إذاً قيمة المحدد (جـ) = قيمة المحدد (جَ)

الأقطار الفرعية

د = 

الأقطار الرئيسية

∴ د = [(١×٣×٢) + (–١×٤×٥) + (٢×٠×٠)] – [(٥×٣×٢) + (٠×٤×١) + (٢×٠×–١)]

[٠ + ٠ + ٣٠] – [٠ + ٢٠ – ٦] =

٤٤- = ٣٠ – ١٤- =

$$
\begin{array}{cc|ccc|}
٠ & ١ & ٥ & ٠ & ١ \\
٣ & -١ & ٠ & ٣ & -١ \\
٤ & ٢ & ٢ & ٤ & ٢
\end{array} = ك'
$$

∴ ك' = [(١×٣×٢) + (٠×٠×٢) + (٥×-١×٤)] – [(٢×٣×٥) +

[٠ + ٠ + ٣٠] + (٦ + ٠ – ٢٠)

٤٤- = ٣٠ – ١٤- =

∴ قيمة المحدد (د) = قيمة المحدد (ك')

خاصية (٤) :

يمكن أخذ عامل مشترك من أى صف أو (عمود) إن وجد، وتكون قيمة المحدد الأصلى تساوى قيمة المحدد الناتج مضروباً فى هذا العامل المشترك.

$$
\begin{vmatrix} ١٥ & ١٠ & ٥ \\ ٢ & ١ & ٠ \\ ٤ & ٥ & ٣ \end{vmatrix} = ٥ \times \begin{vmatrix} ٣ & ٢ & ١ \\ ٢ & ١ & ٠ \\ ٤ & ٥ & ٣ \end{vmatrix}
$$

بأخذ (٥) عامل مشترك من الصف الأول

$$\begin{vmatrix} 4 & 0 & 3 \\ -8 & 1 & 2 \\ 12 & 5 & 7 \end{vmatrix} = 4 \times \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \end{vmatrix}$$

بأخذ (٤) عامل مشترك من العمود الأول

خاصية (٥) :

إذا بدلنا صف محل صف مجاور أو (عمود محل عمود مجاور) فإن قيمة المحدد الناتج تساوى (−١) × قيمة المحدد الأصلى.

$$\begin{vmatrix} 5 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 6 \end{vmatrix} = (-1) \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & -1 \\ 0 & 4 & 6 \end{vmatrix}$$

بإبدال الصف الأول مكان الصف الثانى

$$= (-1)(-1) \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 5 & -1 & 3 \\ 0 & 6 & 4 \end{vmatrix}$$

بإبدال العمود الثانى مكان العمود الثالث

خاصية (٦) :

إذا ضربنا عناصر صف ما أو (عمود ما) فى مقدار ثابت وجمعنا الناتج على أو (طرحنا الناتج من) عناصر صف آخر أو (عمود آخر) فإن قيمة المحدد لا تتغير. وتوضح ذلك بالأمثلة التالية:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 7 & 9 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

وذلك بضرب الصف الأول فى (−٢) وجمعه على الصف الثانى

= صفر (لتطابق الصفين الثانى والثالث)

$$\begin{vmatrix} ١١ & ٢ & -٣ \\ -١٤ & -٢ & ٤ \\ ١٥ & ٠ & -٥ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ٢ & ٢ & -٣ \\ -٢ & -٢ & ٤ \\ ٠ & ٠ & -٥ \end{vmatrix}$$

وذلك بضرب العمود الأول فى (٣) وجمعه على العمود الثالث

= صفر (لتطابق العمودين الثانى والثالث)

خاصية (٧) :

إذا كانت جميع عناصر المحدد تساوى صفر فيماعدا العناصر التى تقع على القطر الرئيسى (من أعلى اليمين إلى أسفل اليسار) فإن قيمة هذا المحدد تكون عبارة عن حاصل ضرب عناصر القطر الرئيسى.

فإذا كان لدينا المحدد التالى : $\begin{vmatrix} ٠ & ٠ & ٢ \\ ٠ & ٣ & ٠ \\ ٤ & ٠ & ٠ \end{vmatrix}$

فإن قيمة هذا المحدد $= ٢ \times \begin{vmatrix} ٠ & ٣ \\ ٤ & ٠ \end{vmatrix} = ٢ \times ٣ \times ٤ = ٢٤$

وكذلك فإن : $\begin{vmatrix} ٠ & ٠ & ١ \\ ٠ & ١ & ٠ \\ ١ & ٠ & ٠ \end{vmatrix} = ١ \times ١ \times ١ = ١$

وبصفة عامة فإن :

$$\begin{vmatrix} ٠ & \cdots & ٠ & ٠ & أ_{١١} \\ ٠ & \cdots & ٠ & أ_{٢٢} & ٠ \\ ٠ & \cdots & أ_{٣٣} & ٠ & ٠ \\ ٠ & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ أ_{نن} & ٠ & ٠ & ٠ & ٠ \end{vmatrix} = أ_{١١} \times أ_{٢٢} \times أ_{٣٣} \times \cdots \times أ_{نن}$$

خاصية (٨) :

إذا كان هناك محدد يحتوى على صف أو (عمود) مكون من مجموع حدين، فإنه يمكن التعبير عن هذا المحدد بمجموع محددين آخرين كالآتى:

$$\begin{vmatrix} (\text{ص}+٥) & ١٠ \\ (\text{ع}-٤) & ١٥ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{ص} & ١٠ \\ \text{ع} & ١٥ \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ٥ & ١٠ \\ -٤ & ١٥ \end{vmatrix}$$

"الإثبات"

١٥ (ص + ٥) − ١٠ (ع − ٤) = (١٥ص − ١٠ع) + [٧٥ − (−٤٠)]

١٥ ص + ٧٥ − ١٠ع + ٤٠ = ١٥ ص − ١٠ ع + ٧٥ + ٤٠

١٥ ص − ١٠ ع + ١١٥ = ١٥ ص − ١٠ ع + ١١٥

وكذلك يمكن تجزئة المحدد التالى كمايلى:

$$\begin{vmatrix} ٥ & ١ & ٧ \\ ٤ & ٠ & ٥ \\ ٣ & ٢ & ٣ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ٥ & ١ & (٥+٢) \\ ٤ & ٠ & (٤+١) \\ ٣ & ٢ & (٣+٠) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ٥ & ١ & ٥ \\ ٤ & ٠ & ٤ \\ ٣ & ٢ & ٣ \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ٥ & ١ & ٢ \\ ٤ & ٠ & ١ \\ ٣ & ٢ & ٠ \end{vmatrix}$$

$$٩ = \text{صفر} + ٩$$

مثال (١٠) :

اثبت أن قيمة المحددات التالية تساوى صفر بدون فكها :

$$(١) \quad |\text{أ}| = \begin{vmatrix} ١٥ & ٦ & ١٢ & ١٨ \\ -٧ & ٣ & -٢ & ٥ \\ ٢٠ & ٠ & ١ & ٨ \\ ١٠ & ٤ & ٨ & ١٢ \end{vmatrix}$$

الحـــل

نأخذ (٣) عامل مشترك من الصف الأول وكذلك (٢) عامل مشترك من الصف الرابع فيصبح المحدد كالتالى:

$$|\text{أ}| = ٣ \times ٢ \begin{vmatrix} ٦ & ٤ & ٢ & ٥ \\ ٥ & -٢ & ٣ & -٧ \\ ٨ & ١ & ٠ & ٢٠ \\ ٦ & ٤ & ٢ & ٥ \end{vmatrix} = \text{صفر}$$

لأن الصفين الأول والرابع متطابقان.

(٢) $|\text{ب}| = \begin{vmatrix} ١٠ & ٢ & ٨ \\ ١ & ٦ & -٥ \\ ١١ & ٤ & ٧ \end{vmatrix}$

الحـــل

بضرب العمود الأول فى (١) وجمعه على العمود الثانى :

$$|\text{ب}| = \begin{vmatrix} ١٠ & ١٠ & ٨ \\ ١ & ١ & -٥ \\ ١١ & ١١ & ٧ \end{vmatrix} = \text{صفر}$$

لأن العمودان الثانى والثالث متطابقان.

(٣) $|\text{ج}| = \begin{vmatrix} ٥ & ٤ & ٧ \\ ٢ & ١٠ & ٨ \\ ١٦ & ١٧ & ٢٥ \end{vmatrix}$

الحـــل

نأخذ (٢) عامل مشترك من الصف الثانى:

$$|ج| = ٢ \times \begin{vmatrix} ٧ & ٤ & ٥ \\ ٤ & ٥ & ١ \\ ٢٥ & ١٧ & ١٦ \end{vmatrix}$$

بضرب الصف الأول فى (٣) وجمعه على الصف الثانى:

$$|ج| = ٢ \times \begin{vmatrix} ٧ & ٤ & ٥ \\ ٢٥ & ١٧ & ١٦ \\ ٢٥ & ١٧ & ١٦ \end{vmatrix} = \text{صفر}$$

لأن الصفين الثانى و الثالث متطابقين

مثال (١١):

أثبت أن قيمة المحدد التالى = صفر (بدون فكه) :

$$\begin{vmatrix} ب^{٢} & جب & ب \\ ب & جـ & جـ \\ ب & جـ & ا \end{vmatrix}$$

الحـــل

نأخذ ب عامل مشترك من الصف الأول فتكون قيمة المحدد :

$$= ب \times \begin{vmatrix} ب & جـ & ب \\ ب & جـ & جـ \\ ب & جـ & ا \end{vmatrix}$$

ثم نأخذ (ب) عامل مشترك من العمود الأول وكذلك (جـ) عامل مــشترك مــن العمود الثانى:

$$= \text{ب}^{2} \times \text{جـ} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \text{ب} \\ 1 & 1 & \text{جـ} \\ 1 & 1 & \text{ا} \end{vmatrix} = \text{صفر}$$ (لتطابق العمودان الأول والثانى)

مثال (١٢) :

باستخدام خواص المحددات أثبت أن:

$$\begin{vmatrix} \text{ا} & \text{جـ} & 1 & \text{ب}+\text{د} \\ \text{ب} & \text{د} & 1 & \text{ا}+\text{جـ} \\ \text{جـ} & \text{ب} & 1 & \text{ا}+\text{د} \\ \text{د} & \text{ا} & 1 & \text{جـ}+\text{ب} \end{vmatrix} = \text{صفر}$$

الحـــــل

بإضافة العمودين الأول والثانى إلى العمود الرابع يصبح المحدد كالتالى:

$$\begin{vmatrix} \text{ا} & \text{جـ} & 1 & (\text{ا}+\text{ب}+\text{جـ}+\text{د}) \\ \text{ب} & \text{د} & 1 & (\text{ا}+\text{ب}+\text{جـ}+\text{د}) \\ \text{جـ} & \text{ب} & 1 & (\text{ا}+\text{ب}+\text{جـ}+\text{د}) \\ \text{د} & \text{ا} & 1 & (\text{ا}+\text{ب}+\text{جـ}+\text{د}) \end{vmatrix}$$

ثم نأخذ (أ + ب + ج + د) عامل مشترك من العمود الرابع:

$$(\text{ا}+\text{ب}+\text{جـ}+\text{د}) \begin{vmatrix} \text{ا} & \text{جـ} & 1 & 1 \\ \text{ب} & \text{د} & 1 & 1 \\ \text{جـ} & \text{ب} & 1 & 1 \\ \text{د} & \text{ا} & 1 & 1 \end{vmatrix} = \text{صفر}$$ (لتطابق العمودين الثالث والرابع)

مثال (١٣) :

باستخدام خواص المحددات أثبت أن:

$$\begin{vmatrix} \text{ب}+\text{جـ} & \text{ا}-\text{ب} & \text{ا} \\ \text{جـ}+\text{ا} & \text{ب}-\text{جـ} & \text{ب} \\ \text{ا}+\text{ب} & \text{جـ}-\text{ا} & \text{جـ} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{ا} & \text{ب} & \text{جـ} \\ \text{ب} & \text{جـ} & \text{ا} \\ \text{جـ} & \text{ا} & \text{ب} \end{vmatrix}$$

الحـــل

بطرح العمود الثالث من العمود الثانى للطرف الأيمن:

$$\text{الطرف الأيمن} = \begin{vmatrix} \text{ب}+\text{جـ} & -\text{ب} & \text{ا} \\ \text{ا}+\text{ب} & -\text{ا} & \text{جـ} \\ \text{ا}+\text{ب} & \text{جـ}-\text{ا} & \text{جـ} \end{vmatrix}$$

بإضافة العمود الثانى إلى العمود الأول:

$$\text{الطرف الأيمن} = \begin{vmatrix} \text{جـ} & -\text{ب} & \text{ا} \\ \text{ا} & -\text{جـ} & \text{ب} \\ \text{ب} & -\text{ا} & \text{جـ} \end{vmatrix}$$

نأخذ (−١) عامل مشترك من العمود الثانى :

$$\text{الطرف الأيمن} = (-1) \times \begin{vmatrix} \text{جـ} & \text{ب} & \text{ا} \\ \text{ا} & \text{جـ} & \text{ب} \\ \text{ب} & \text{ا} & \text{جـ} \end{vmatrix}$$

بإبدال العمودين الأول والثانى:

الطرف الأيمن = $\cancel{(-\text{١}) \times (-\text{١})} \times \begin{vmatrix} \text{ا} & \text{جـ} & \text{ب} \\ \text{ب} & \text{ا} & \text{جـ} \\ \text{جـ} & \text{ب} & \text{ا} \end{vmatrix}$

ثم بإبدال العمودين الثانى والثالث :

الطرف الأيمن = $(-\text{١}) \times \begin{vmatrix} \text{جـ} & \text{ا} & \text{ب} \\ \text{ا} & \text{ب} & \text{جـ} \\ \text{ب} & \text{جـ} & \text{ا} \end{vmatrix}$

ثم إبدال العمودين الأول والثانى :

الطرف الأيمن = $\cancel{(-\text{١}) \times (-\text{١})} \times \begin{vmatrix} \text{جـ} & \text{ب} & \text{ا} \\ \text{ا} & \text{جـ} & \text{ب} \\ \text{ب} & \text{ا} & \text{جـ} \end{vmatrix}$

= $\begin{vmatrix} \text{جـ} & \text{ب} & \text{ا} \\ \text{ا} & \text{جـ} & \text{ب} \\ \text{ب} & \text{ا} & \text{جـ} \end{vmatrix}$ = الطرف الأيسر

مثال (١٤) : أثبت بدون فك المحدد أن :

$$\begin{vmatrix} \text{٦} & \text{٣} & \text{١٥} \\ \text{١١} & \text{٧} & \text{٧} \\ \text{١٨} & \text{١٢} & \text{٤} \end{vmatrix} = \text{صفر}$$

الحــــل

نأخذ (٣) عامل مشترك من الصف الأول، وكذلك (٢) عامل مشترك من الصف الثالث:

$$= 3 \times 2 \times \begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 7 & 7 & 11 \\ 2 & 6 & 9 \end{vmatrix}$$

بطرح الصف الثالث من الصف الثاني :

$$= 6 \times \begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 5 & 1 & 2 \\ 2 & 6 & 9 \end{vmatrix} = \text{صفر (لتطابق الصفين الأول والثانى)}$$

مثال (١٥) :

باستخدام خواص المحددات إثبت أن :

$$\begin{vmatrix} \text{ب} - \text{أ} & 1 & \text{أ} \\ \text{ب} - \text{جـ} & 1 & \text{ب} \\ \text{جـ} - \text{أ} & 1 & \text{جـ} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{أ} & 1 & \text{ب} \\ \text{ب} & 1 & \text{جـ} \\ \text{جـ} & 1 & \text{أ} \end{vmatrix}$$

الحــــل

من خواص المحددات أنه يمكن تقسيم المحدد الموجود بالطرف الأيمن كالتالى:

$$\text{الطرف الأيمن} = \begin{vmatrix} \text{أ} - \text{ب} & 1 & \text{أ} \\ \text{ب} - \text{جـ} & 1 & \text{ب} \\ \text{جـ} - \text{أ} & 1 & \text{جـ} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{أ} & 1 & \text{أ} \\ \text{ب} & 1 & \text{ب} \\ \text{جـ} & 1 & \text{جـ} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -\text{ب} & 1 & \text{أ} \\ -\text{جـ} & 1 & \text{ب} \\ -\text{أ} & 1 & \text{جـ} \end{vmatrix}$$

وهذا المحدد قيمته = صفر لتطابق العمودين الأول والثالث

$$= \begin{vmatrix} -\text{ب} & 1 & \text{أ} \\ -\text{جـ} & 1 & \text{ب} \\ -\text{أ} & 1 & \text{جـ} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \text{ب} & 1 & \text{أ} \\ \text{جـ} & 1 & \text{ب} \\ \text{أ} & 1 & \text{جـ} \end{vmatrix}$$ بأخذ (−) عامل مشترك من العمود الأول

$$= \cancel{(-)}(-) \begin{vmatrix} 1 & \text{ب} & \text{أ} \\ 1 & \text{جـ} & \text{ب} \\ 1 & \text{أ} & \text{جـ} \end{vmatrix}$$ بإبدال العمودين الأول والثانى

$$= (-) \begin{vmatrix} 1 & \text{أ} & \text{ب} \\ 1 & \text{ب} & \text{جـ} \\ 1 & \text{جـ} & \text{أ} \end{vmatrix}$$ بإبدال العمودين الثانى والثالث

$$= \cancel{(-)}(-) \begin{vmatrix} \text{أ} & 1 & \text{ب} \\ \text{ب} & 1 & \text{جـ} \\ \text{جـ} & 1 & \text{أ} \end{vmatrix}$$ بإبدال العمودين الأول والثانى

$$= \begin{vmatrix} \text{أ} & 1 & \text{ب} \\ \text{ب} & 1 & \text{جـ} \\ \text{جـ} & 1 & \text{أ} \end{vmatrix} =$$ الطرف الأيسر

استخدام المحددات فى حل المعادلات الخطية ذات المجهولين :

إذا كان لدينا معادلتى الدرجة الأولى ذات المجهولين كمايلى:

$\text{أ}_{11}\text{س} + \text{أ}_{21}\text{ص} = \text{جـ}_{1}$

$\text{أ}_{12}\text{س} + \text{أ}_{22}\text{ص} = \text{جـ}_{2}$

حيث س ، ص يمثلان مجاهيل المعادلات، كما أن $\begin{pmatrix} \text{أ}_{11} & \text{أ}_{21} \\ \text{أ}_{12} & \text{أ}_{22} \end{pmatrix}$ يمثلوا معاملات المجاهيل س و ص، وكذلك $\begin{pmatrix} \text{جـ}_{1} \\ \text{جـ}_{2} \end{pmatrix}$ يمثلا الحدود المطلقة. ولحل هذا النوع من المعادلات الخطية باستخدام المحددات (طريقة كرامير Cramer نتبع الخطوات التالية:

(١) نرتب المعادلات بحيث تكون المتغيرات س ، ص تحت بعضها والحـــدود المطلقة فى الطرف الأيسر.

(٢) نكون محدد المعاملات (Δ) على الصورة : $\begin{vmatrix} \text{أ}_{11} & \text{أ}_{21} \\ \text{أ}_{12} & \text{أ}_{22} \end{vmatrix}$ وهو محدد يحتوى على الأرقام المجاورة لــ س و ص ، ثم نأتى بقيمة المحدد، مع ملاحظة أنه إذا كان قيمة هذا المحدد تساوى صفر فإنه يمكن القول أنه لا يوجد حل لهذا النظام من المعادلات ولا نكمل الحل، أما إذا كانت قيمـــة المحـــدد لا تساوى صفر فإننا نقوم بإجراء باقى الخطوات كالتالى.

(٣) نكون محدد س (Δس) على الصورة : $\begin{vmatrix} \text{جـ}_{1} & \text{أ}_{21} \\ \text{جـ}_{2} & \text{أ}_{22} \end{vmatrix}$ وذلك باستبدال العمـــود الأول (عمود معاملات س) بعمود الثوابت (القيم المطلقـــة) فـــى محـــدد المعاملات، ثم نأتى بقيمة المحدد.

(٤) نكون محدد ص (Δص) على الصورة : $\begin{vmatrix} \text{أ}_{11} & \text{جـ}_{1} \\ \text{أ}_{12} & \text{جـ}_{2} \end{vmatrix}$ وذلك باستبدال العمود الثانى (عمود معاملات ص) بعمود الثوابت (القيم المطلقـــة) فـــى محـــدد المعاملات، ثم نأتى بقيمة المحدد.

(٥) نحصل على قيم س ، ص كالآتى:

$$\text{س} = \frac{\text{قيمة محدد س } (\Delta\text{س})}{\text{قيمة محدد المعاملات } (\Delta)} \quad ، \quad \text{ص} = \frac{\text{قيمة محدد ص } (\Delta\text{ص})}{\text{قيمة محدد المعاملات } (\Delta)}$$

مثال (١٦) :

حل المعادلات الآتية باستخدام المحددات:

(أ) ٢س + ٣ ص = ٥
٤س + ٥ ص = ٧

(ب) ٨س + ٣ص = ٧
٤ س + ٢ ص =٥

(ج) ٣س – ٢ص = ٥
٢س – ٤ص = –٢

الحــــل

(أ) ٢ س + ٣ ص = ٥
٤ س + ٥ ص = ٧

$$١- \quad \Delta = \begin{vmatrix} ٢ & ٣ \\ ٤ & ٥ \end{vmatrix} = (٢ \times ٥) - (٣ \times ٤) = ١٠ - ١٢ = -٢$$

$$٢- \quad \Delta_{\text{س}} = \begin{vmatrix} ٥ & ٣ \\ ٧ & ٥ \end{vmatrix} = (٥ \times ٥) - (٣ \times ٧) = ٢٥ - ٢١ = ٤$$

$$٣- \quad \Delta_{\text{ص}} = \begin{vmatrix} ٢ & ٥ \\ ٤ & ٧ \end{vmatrix} = (٢ \times ٧) - (٤ \times ٥) = ١٤ - ٢٠ = -٦$$

$$\text{س} = \frac{\Delta\text{س}}{\Delta} = \frac{٤}{-٢} = -٢ \qquad \text{ص} = \frac{\Delta\text{ص}}{\Delta} = \frac{-٦}{-٢} = ٣$$

(ب) $8\,\text{س} + 3\,\text{ص} = 7$

$4\,\text{س} + 2\,\text{ص} = 5$

$$1-\quad \Delta = \begin{vmatrix} 8 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = (8 \times 2) - (4 \times 3) = 16 - 12 = 4$$

$$2-\quad \Delta_{\text{س}} = \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = (7 \times 2) - (5 \times 3) = 14 - 15 = -1$$

$$3-\quad \Delta_{\text{ص}} = \begin{vmatrix} 8 & 7 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = (8 \times 5) - (7 \times 4) = 40 - 28 = 12$$

$$\text{س} = \frac{\Delta_{\text{س}}}{\Delta} = \frac{-1}{4} \qquad ، \qquad \text{ص} = \frac{\Delta_{\text{ص}}}{\Delta} = \frac{12}{4} = 3$$

(ج) $3\,\text{س} + 2\,\text{ص} = 5$

$2\,\text{س} + 4\,\text{ص} = -2$

$$1-\quad \Delta = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = (3 \times -4) - (-2 \times 2) = -12 + 4 = -8$$

$$2-\quad \Delta_{\text{س}} = \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ -2 & -4 \end{vmatrix} = (5 \times -4) - (-2 \times -2) = -20 - 4 = -24$$

$$3-\quad \Delta_{\text{ص}} = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = (3 \times -2) - (5 \times 2) = -6 - 10 = -16$$

$$\text{س} = \frac{\Delta_{\text{س}}}{\Delta} = \frac{-24}{-8} = 3 \qquad ، \qquad \text{ص} = \frac{\Delta_{\text{ص}}}{\Delta} = \frac{-16}{-8} = 2$$

استخدام المحددات فى حل المعادلات الخطية ذات الثلاثة مجاهيل:

إذا كان لدينا نظام المعادلات التالى:

أ$_{١١}$ س + أ$_{٢١}$ ص + أ$_{٣١}$ ع = جـ$_{١}$

أ$_{١٢}$ س + أ$_{٢٢}$ ص + أ$_{٣٢}$ ع = جـ$_{٢}$

أ$_{١٣}$ س + أ$_{٢٣}$ ص + أ$_{٣٣}$ ع = جـ$_{٣}$

حيث أن س ، ص ، ع تمثل المتغيرات المطلـــوب معرفـــة قيمتهـــا، أ$_{١١}$، أ$_{٢١}$، .... ، أ$_{٣٣}$ تمثل معاملات المتغيرات س ، ص، ع. كما تمثل جـ$_{١}$، جـ$_{٢}$، جـ$_{٣}$ الثوابت (الحدود المطلقة).

ويتم حل هذا النوع من المعادلات باستخدام المحددات أيـــضاً بـــنفس الطريقـــة السابقة مع اختلافات بسيطة فى الخطوات كالتالى:

(١) نكون محدد المعاملات (Δ) على الصورة : $\begin{vmatrix} \text{أ}_{١١} & \text{أ}_{٢١} & \text{أ}_{٣١} \\ \text{أ}_{١٢} & \text{أ}_{٢٢} & \text{أ}_{٣٢} \\ \text{أ}_{١٣} & \text{أ}_{٢٣} & \text{أ}_{٣٣} \end{vmatrix}$ ثم نحسب قيمة هذا المحدد.

(٢) نكون محدد س (Δس) على الصورة: $\begin{vmatrix} \text{جـ}_{١} & \text{أ}_{٢١} & \text{أ}_{٣١} \\ \text{جـ}_{٢} & \text{أ}_{٢٢} & \text{أ}_{٣٢} \\ \text{جـ}_{٣} & \text{أ}_{٢٣} & \text{أ}_{٣٣} \end{vmatrix}$ وذلك باستبدال العمـــود الأول (عمود معاملات س) بعمود الثوابت فى محدد المعاملات، ثم نحسب قيمة المحدد.

(٣) نكون محدد ص (∆ص) على الصورة : $\begin{vmatrix} \text{أ}_{31} & \text{ج}_{1} & \text{أ}_{11} \\ \text{أ}_{32} & \text{ج}_{2} & \text{أ}_{12} \\ \text{أ}_{33} & \text{ج}_{3} & \text{أ}_{13} \end{vmatrix}$

وذلك باستبدال العمود الثانى (عمود معاملات ص) بعمود الثوابت فـــى محـــدد المعاملات، ثم نحسب قيمة المحدد.

(٤) نكون محدد ع (∆ع) على الصورة : $\begin{vmatrix} \text{ج}_{1} & \text{أ}_{21} & \text{أ}_{11} \\ \text{ج}_{2} & \text{أ}_{22} & \text{أ}_{12} \\ \text{ج}_{3} & \text{أ}_{23} & \text{أ}_{13} \end{vmatrix}$

وذلك باستبدال العمود الثالث (عمود معاملات ع) بعمود الثوابـــت فـــى محـــدد المعاملات ثم نحسب قيمة المحدد.

(٥) نحصل على قيمة س ، ص ، ع كالآتى :

$$\text{س} = \frac{\text{قيمة محدد س } (\Delta \text{ س})}{\text{قيمة محدد المعاملات } (\Delta)} \quad ،$$

$$\text{ص} = \frac{\text{قيمة محدد ص } (\Delta \text{ ص})}{\text{قيمة محدد المعاملات } (\Delta)}$$

$$\text{ع} = \frac{\text{قيمة محدد ع } (\Delta \text{ ع})}{\text{قيمة محدد المعاملات } (\Delta)} \quad ،$$

مثال (١٧):

حل المعادلات الآتية باستخدام المحددات:

(أ) ٣س + ٤ص + ٢ع = ٢ (ب) ٤س + ٢ص + ع = ١

٤س + ٥ ص + ٣ع = ٥ س + ٣ص + ٢ع= ٥

٥س + ٧ص + ٤ ع = ٧ ٣س + ٢ص + ٣ع = ٧

الحـــــل

(أ) ٣س + ٤ص + ٢ع = ٢

٤س + ٥ص + ٣ع = ٥

٥س + ٧ص + ٤ع = ٧

(١) Δ =

٥٠ + ٦٣ + ٦٤ = ١٧٧

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & 3 \\ 5 & 7 & 4 \end{vmatrix}\begin{matrix} 3 & 4 \\ 4 & 5 \\ 5 & 7 \end{matrix}$$

٦٠ +٦٠+٥٦ = ١٧٦

Δ = ١٧٦ − ١٧٧ = −١

---

(٢) Δس =

٧٠ + ٤٢ + ٨٠ = ١٩٢

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 5 & 5 & 3 \\ 7 & 7 & 4 \end{vmatrix}\begin{matrix} 2 & 4 \\ 5 & 5 \\ 7 & 7 \end{matrix}$$

٤٠ +٨٤+٧٠ = ١٩٤

∴ Δس = ١٩٤ − ١٩٢ = ٢

(٣) Δص = ٥٠ + ٦٣ + ٣٢ = ١٤٥

$$\begin{array}{cc|ccc|} ٢ & ٣ & ٢ & ٤ & ٣ \\ ٥ & ٤ & ٥ & ٥ & ٤ \\ ٧ & ٥ & ٤ & ٧ & ٥ \end{array}$$

٦٠ + ٣٠ + ٥٦ = ١٤٦

∴ Δص = ١٤٦ − ١٤٥ = ١

---

(٤) Δع = ٥٠ + ١٠٥ + ١١٢ = ٢٦٧

$$\begin{array}{cc|ccc|} ٤ & ٢ & ٢ & ٤ & ٢ \\ ٥ & ٥ & ٣ & ٥ & ٥ \\ ٧ & ٧ & ٧ & ٧ & ٧ \end{array}$$

١٠٥ + ١٠٠ + ٥٦ = ٢٦١

∴ Δع = ٢٦١ − ٢٦٧ = −٦

---

(٥)

∴ س = $\frac{\text{Δس}}{Δ}$ = $\frac{٢}{-١}$ = −٢ ، ∴ ص = $\frac{\text{Δص}}{Δ}$ = $\frac{١}{-١}$ = −١ ، ∴ ع = $\frac{\text{Δع}}{Δ}$ = $\frac{-٦}{-١}$ = ٦

(ب) ٤س + ٢ص + ع = ١
س + ٣ص + ٢ع = ٥
٣س + ٢ص − ٣ع = ٧

(١) Δ =

٩ + ١٦ −٦ = ١٩

$$\left|\begin{array}{ccc} ٤ & ٢ & ١ \\ ١ & ٣ & ٢ \\ ٣ & ٢ & -٣ \end{array}\right| \begin{array}{cc} ٤ & ٢ \\ ١ & ٣ \\ ٣ & ٢ \end{array}$$

−٣٦ +١٢+٢ = −٢٢

Δ = (−٢٢) − (١٩) = −٤١

(٢) Δس =

٢١ + ٤ −٣٠ = −٥

$$\left|\begin{array}{ccc} ١ & ٢ & ١ \\ ٥ & ٣ & ٢ \\ ٧ & ٢ & -٣ \end{array}\right| \begin{array}{cc} ١ & ٢ \\ ٥ & ٣ \\ ٧ & ٢ \end{array}$$

−٩ +٢٨+١٠ = ٢٩

Δس = ٢٩ − (−٥) = ٢٩ + ٥ = ٣٤

(٣) Δص = ١٥ + ٥٦ -٣ = ٦٨

$$\begin{array}{cc|ccc|} ١ & ٤ & ١ & ١ & ٤ \\ ٥ & ١ & ٢ & ٥ & ١ \\ ٧ & ٣ & ٣- & ٧ & ٣ \end{array}$$

-٦٠ + ٦ +٧ = -٤٧

Δص = - ٤٧ - ٦٨ = -١١٥

---

(٤) Δع = ٩ + ٤٠ +١٤ = ٦٣

$$\begin{array}{cc|ccc|} ٢ & ٤ & ١ & ٢ & ٤ \\ ٣ & ١ & ٥ & ٣ & ١ \\ ٢ & ٣ & ٧ & ٢ & ٣ \end{array}$$

٨٤ + ٣٠ +٢ = ١١٦

Δع = ١١٦ - ٦٣ = ٥٣

(٥)

$\therefore$ س = $\frac{\text{Δس}}{\Delta}$ = $\frac{\text{٣٤}}{\text{٤١-}}$ ، $\therefore$ ص = $\frac{\text{Δص}}{\Delta}$ = $\frac{\text{-١١٥}}{\text{٤١-}}$ = $\frac{\text{١١٥}}{\text{٤١}}$ ، $\therefore$ ع = $\frac{\text{Δع}}{\Delta}$ = $\frac{\text{٥٣}}{\text{٤١-}}$

مثال (١٨) :

أوجد حل المعادلات الآتية باستخدام المحددات :

س + ص + ع = ٦

٢س − ص = ٤

س − ٢ع = ١

الحـــل

−١ + ٠ − ٤ = −٥

(١) $$\Delta = \left|\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{array}\right| \begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{array}$$

٢ + ٠ + ٠ = ٢

= ٢ − (−٥) = ٢ + ٥ = ٧

−١ + ٠ + (−٨) = −٩

(٢) $$\Delta_{س} = \left|\begin{array}{ccc} 6 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{array}\right| \begin{array}{cc} 6 & 1 \\ 4 & -1 \\ 1 & 0 \end{array}$$

١٢ + ٠ + ٠ = ١٢

= ١٢ − (−٩) = ١٢ + ٩ = ٢١

٤ + ٠ - ٢٤ = -٢٠

(٣) Δص =

$$\begin{array}{cc|ccc|} ٦ & ١ & ١ & ٦ & ١ \\ ٤ & ٢ & ٠ & ٤ & ٢ \\ ١ & ١ & ٢ & ١ & ١ \end{array}$$

-٨ + ٠ + ٢ = -٦

∴ = -٦ - (-٢٠) = -٦ + ٢٠ = ١٤

-٦ + ٠ + ٢ = -٤

(٤) Δع =

$$\begin{array}{cc|ccc|} ١ & ١ & ٦ & ١ & ١ \\ -١ & ٢ & ٤ & -١ & ٢ \\ ٠ & ١ & ١ & ٠ & ١ \end{array}$$

-١ + ٤ + ٠ = ٣

= ٣ - (-٤) = ٣ + ٤ = ٧

(٥)

∴ س = $\frac{\Delta س}{\Delta}$ ، ∴ ص = $\frac{\Delta ص}{\Delta}$ ، ∴ ع = $\frac{\Delta ع}{\Delta}$

= $\frac{٢١}{٧}$ = ٣ ، = $\frac{١٤}{٧}$ = ٢ ، = $\frac{٧}{٧}$ = ١

تمـــــارين

(١) أذكر خصائص المحددات مع ذكر مثال بسيط للإثبات .

(٢) أوجد قيمة (مفكوك) المحددات التالية :

(أ) $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}$

(ب) $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{vmatrix}$

(ج) $\begin{vmatrix} -5 & -2 \\ 10 & 4 \end{vmatrix}$

(د) $\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$

(هـ) $\begin{vmatrix} 2 & 6 & 4 \\ 3 & 5 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$

(و) $\begin{vmatrix} 7 & 3 & 0 \\ 4 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & 2 \end{vmatrix}$

(ل) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 7 \\ 4 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$

(م) $\begin{vmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 4 & 6 & 2 \end{vmatrix}$

(ن) $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 5 & 3 & -1 \\ -2 & 4 & 3 \end{vmatrix}$

(ى) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & -5 \\ 0 & 4 & 3 \\ 6 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

(٣) باستخدام خصائص المحددات إثبت أن كل محدد مما يلى يساوى الصفر:

$$\begin{vmatrix} ٧ & ١ & ٨ \\ ٩ & -٤ & ٥ \\ ٧ & ١ & ٨ \end{vmatrix} \quad ، \quad \begin{vmatrix} ٩ & -٧ & ٢ \\ ٢ & ٢ & ٤ \\ -٨ & ١٣ & ٥ \end{vmatrix} \quad ، \quad \begin{vmatrix} ٢ & -٦ & ٨ \\ -٥ & ٣ & ٥ \\ ١ & -٣ & ٤ \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} ٣ & ٥ & ٢ \\ ٩ & ٧ & ٤ \\ ١٥ & ٩ & ٦ \end{vmatrix} \quad ، \quad \begin{vmatrix} -٦ & -٦ & ٨ \\ -١٠ & ٣ & ٥ \\ -٣ & -٣ & ٤ \end{vmatrix} \quad ، \quad \begin{vmatrix} -٣ & ٦ & ١٢ \\ -٢ & ٤ & ٨ \\ ١٠ & -١ & ٥ \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -٢ & ١٠ & ٦ & ٨ \\ ٤ & ١٦ & ٣٢ & ٨١ \\ ٧ & ٠ & ١ & ٥ \\ ٥ & ١٠ & ٧ & ١٣ \end{vmatrix} \quad ، \quad \begin{vmatrix} ٣ & ٠ & ٤ & ١ \\ ٩ & ٣ & ٢ & ٣ \\ ٦ & ٤ & ٦ & ٢ \\ ٣ & ٣ & ٤ & ١ \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \text{ع} & \text{ص} & \text{س} \\ \text{ع}^٢ & \text{ص}^٢ & \text{س}^٢ \\ (\text{ع}^٢ - ٣\text{ع}) & (\text{ص}^٢ - ٣\text{ص}) & (\text{س}^٢ - ٣\text{س}) \end{vmatrix}$$

(٤) إذا كانت قيمة المحددات التالية تساوى الصفر فما هى قيمة ص :

$$\begin{vmatrix} ٣ & -١ & ٢ \\ ١ & ٤ & ٥ \\ \text{ص} & ٠ & ١ \end{vmatrix} \quad ، \quad \begin{vmatrix} ٣ & \text{ص} & ٠ \\ -٣ & ١ & -٢ \\ -١ & -٣ & ١ \end{vmatrix} \quad ، \quad \begin{vmatrix} \text{ص} & -١ & ٣ \\ ٢ & ٦ & ٥ \\ -٦ & ٤ & ٧ \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \text{٤} & \text{١} & \text{٥} \\ \text{١} & \text{ص} & \text{١} \\ \text{٣} & \text{٦} & \text{٢} \end{vmatrix} \text{ ، } \begin{vmatrix} \text{٣} & \text{٥} & \text{٢} \\ \text{ص} & \text{٧} & \text{٤} \\ \text{١٥} & \text{٩} & \text{٦} \end{vmatrix} \text{ ، } \begin{vmatrix} \text{١} & \text{ص} & \text{ص}^{\text{٢}} \\ \text{١} & \text{٤} & \text{١٦} \\ \text{١} & \text{٦} & \text{٣٦} \end{vmatrix}$$

(٥) أثبت بدون إيجاد المفكوك أن :

$$\begin{vmatrix} (\text{س} - \text{ص}) & (\text{١} + \text{س}) & \text{٢س} \\ (\text{ص} - \text{ع}) & (\text{١} + \text{ص}) & \text{٢ص} \\ (\text{ع} - \text{س}) & (\text{١} + \text{ع}) & \text{٢ع} \end{vmatrix} = \text{٢} \begin{vmatrix} \text{١} & \text{س} & \text{ص} \\ \text{١} & \text{ع} & \text{س} \\ \text{١} & \text{ص} & \text{ع} \end{vmatrix}$$

(٦) أوجد حل لنظم المعادلات الخطية التالية باستخدام المحددات:

(أ) ٣س+٥ص = ١٩
٦س − ٧ص = ٤

(ب) ٢س + ٣ص = ٥
٤س + ٥ص = ٧

(ج) س + ٢ص = ١
٢س + ٣ص = ٣

(د) ٤س + ٢ص = ٧
٥س + ٣ص = ٥

(د) ٢س − ٣ص =٢
٣س − ص = ١٠

(هـ) ٥س − ص = −١٥
−٢س + ٤ص = −٣٠

(و) ٢س − ص + ع = ٣
٥س + ٣ص + ٢ع = ١٧
٣س + ٤ص − ع = ٨

(ز) س + ٢ص + ٣ع = ٣
٢س + ٣ص + ع = ٤
س + ٥ص + ٣ع = ٣

(ح) ٥س + ٣ص + ٢ع = ٧
٢س + ص + ٥ع = ٩
٣س + ٥ص + ٣ع = ٨

(ط) ٤س + ٢ص +ع = ١
س + ٣ص + ٢ع = ٥
٣س + ٢ص − ٣ع = ٧

الباب السادس

المصفـــوفات

أولاً: تعريف المصفوفة

المصفوفة هى مجموعة من العناصر (الأرقام) مرتبة فى صورة صفوف وأعمدة داخل قوسين [ ] أو ( ). ولا يشترط فى المصفوفة أن يكون عدد الصفوف مساوياً لعدد الأعمدة، لذلك قد تكون المصفوفة مربعة الشكل إذا كان عدد الصفوف يساوى عدد الأعمدة، أو مستطيلة الشكل إذا كان عدد الصفوف لا يساوى عدد الأعمدة.

وليس للمصفوفة قيمة عددية ولكنها مجرد وسيلة مناسبة لعرض مجموعة العناصر كالآتى:

$$\begin{bmatrix} \text{أ}_{\text{ن١}} \cdots & \text{أ}_{\text{٣١}} & \text{أ}_{\text{٢١}} & \text{أ}_{\text{١١}} \\ \text{أ}_{\text{ن٢}} \cdots & \text{أ}_{\text{٣٢}} & \text{أ}_{\text{٢٢}} & \text{أ}_{\text{١٢}} \\ \text{أ}_{\text{ن٣}} \cdots & \text{أ}_{\text{٣٣}} & \text{أ}_{\text{٢٣}} & \text{أ}_{\text{١٣}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \text{أ}_{\text{نم}} \cdots & \text{أ}_{\text{٣م}} & \text{أ}_{\text{٢م}} & \text{أ}_{\text{١م}} \end{bmatrix} = \text{أ}$$

وتتحدد رتبة المصفوفة بعدد الصفوف وعدد الأعمدة التي تشتمل عليها، ففي المصفوفة السابقة إذا رمزنا لعدد الصفوف بالرمز (م) ولعدد الأعمدة بالرمز (ن) فإن رتبة المصفوفة تكون (م × ن) على الترتيب.
فمثلاً إذا كانت المصفوفة مكونة من ثلاثة صفوف وأربعة أعمدة فتكون رتبتها (٣ ×٤). أما إذا كانت المصفوفة مربعة الشكل مكونة من أربعة صفوف وأربعة أعمدة مثلاً فتكون رتبتها (٤ × ٤) وفي هذه الحالة نختصر التعبير ونقول أنها من الرتبة (٤). أما بالنسبة إلى عناصر المصفوفة فنرمز لها كالآتي:

$أ_{١١}$: يسمى عنصر المصفوفة أ ويقع في الصف الأول والعمود الأول.

$أ_{٣٢}$: يسمى عنصر المصفوفة أ ويقع في الصف الثالث والعمود الثاني.

$أ_{مν}$: يسمى عنصر المصفوفة أ ويقع في الصف (م) والعمود (ν)

أي أن الرقم الأول في دليل العنصر السفلي يعبر عن رقم الصف والرقم الثاني يعبر عن رقم العمود.

وتلعب المصفوفات دوراً هاماً في التعبير عن العلاقات الرياضية متعددة المتغيرات بشكل بسيط يسهل فهمه وبالتالي وضع الحلول لهذه العلاقات، فضلاً عن ذلك فإن المصفوفات لها مجالات تطبيقية عديدة في الاقتصاد والإحصاء وبحوث العمليات وغيرها من العلوم الأخرى. ومن ثم فإننا سوف نتناول في هذا الباب بعض المفاهيم والتعاريف الهامة وأنواع المصفوفات ثم ننتقل إلى جبر المصفوفات (الجمع والطرح والضرب) وبعدها نتناول كيفية إيجاد معكوس المصفوفة المربعة بالطرق المختلفة تمهيداً لاستخدامه في حل المعادلات الخطية.

ثانياً: بعض أنواع المصفوفات

هناك أنواع كثيرة من المصفوفات المتطورة. ولكننا سنكتفى بذكر الأنواع الأساسية اللازمة للدراسة الأولية للمصفوفات.

(١) المصفوفة المربعة:

تسمى المصفوفة مربعة إذا كان عدد صفوفها يساوى عدد أعمدتها (م = ن). ويُرمز إلى المصفوفة المربعة التى تحتوى على عدد (ن) من الصفوف وعدد (ن) من الأعمدة بأنها مصفوفة من الرتبة ن، ويطلق على مجموعة العناصر القطرية ($\text{أ}_{\text{١١}}$ ، $\text{أ}_{\text{٢٢}}$، ....، $\text{أ}_{\text{ن ن}}$) القطر الرئيسى أو القائد:

$$\text{أ} = \begin{pmatrix} \text{أ}_{\text{١١}} & \text{أ}_{\text{٢١}} & \cdots & \text{أ}_{\text{١ن}} \\ \text{أ}_{\text{١٢}} & \text{أ}_{\text{٢٢}} & \cdots & \text{أ}_{\text{٢ن}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \text{أ}_{\text{ن١}} & \text{أ}_{\text{ن٢}} & \cdots & \text{أ}_{\text{ن ن}} \end{pmatrix}$$

(٢) المصفوفة القطرية :

هى مصفوفة مربعة كل عنصر فيها لا يقع على القطر الرئيسى يساوى صفراً، ومن أمثلة ذلك المصفوفة:

$$\begin{bmatrix} أ_{١١} & ٠ & ٠ \\ ٠ & أ_{٢٢} & ٠ \\ ٠ & ٠ & أ_{٣٣} \end{bmatrix} \quad \text{مثل} \quad \begin{bmatrix} ٥ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٦ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٢- \end{bmatrix}$$

هذا وقد تكون بعض عناصر القطر الرئيسى أصفاراً.

(٣) المصفوفة الصفرية:

هى المصفوفة التى جميع عناصرها أصفار مثل المصفوفات التالية:

$$\begin{bmatrix} ٠ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٠ \end{bmatrix} ، \begin{bmatrix} ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ \end{bmatrix} ، \begin{bmatrix} ٠ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٠ \end{bmatrix}$$

وسوف يتضح عند دراستنا لجمع وطرح وضرب المصفوفات أن دور المصفوفة الصفرية بالنسبة لجمع وطرح وضرب المصفوفات يناظر دور الصفر بالنسبة لجمع وطرح وضرب الأعداد الحقيقية. أى أنه إذا كانت أ، ب مصفوفتان من الرتبة م × ن ، وكانت (٠) ترمز إلى مصفوفة صفرية رتبتها م × ن أيضاً فإن:
أ – ٠ = أ ، أ + ٠ = أ ، وأيضاً فإن أ – ب = ٠ إذا وفقط إذا كانت أ = ب.
وكذلك فإن حاصل ضرب أى مصفوفة فى مصفوفة صفرية يكون مصفوفة صفرية، وأيضاً فإن حاصل ضرب مصفوفة صفرية فى أى مصفوفة يكون مصفوفة صفرية وذلك بفرض إمكانية إجراء عمليات الضرب.

(٤) مصفوفة الوحدة :

هى مصفوفة مربعة جميع عناصرها أصفار فيماعدا عناصر القطر الرئيسى تساوى الواحد الصحيح، ويرمز لها بالرمز I ، ومن أمثلتها :

$\begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$ ويرمز لها بالرمز I_2 ، $\begin{bmatrix} ١ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ١ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ١ \end{bmatrix}$ ويرمز لها بالرمز I_3 .

وسـوف يتـضح عنـد دراسـتنا لـضرب المـصفوفات ومعكوسـها أن دور مـصفوفة الوحـدة بالنـسبة لـضرب المـصفوفات ومعكوسـها ينـاظر دور الواحـد الصحيح بالنسبة لضرب الأعداد الحقيقية ومعكوسها. أى أنه إذا كان لدينا مصفوفة (أ) فإنه بضرب مصفوفة الوحدة فى المصفوفة (أ) أو بضرب المصفوفة (أ) فى مصفوفة الوحدة فإن الناتج فى كلتا الحالتين هو المصفوفة (أ) ، وذلك بفرض أن رتب المصفوفات المستخدمة تسمح بإجراء عمليات الضرب كما سنرى فيمابعد. وأيضاً فإنه إذا كانت (أ) مصفوفة مربعة رتبتها (ن)، وكانت ($أ^{-١}$) ترمز لمعكوس المصفوفة (أ) فإن :

$$أ\ أ^{-١} = أ^{-١}\ أ = I_{ن}$$

(٥) المصفوفة القياسية:

هـى مـصفوفة مربعـة جميـع عناصـرها أصـفار فيماعـدا عناصـر القطـر الرئيسى تساوى مقدار ثابت.

$\begin{bmatrix} ل & ٠ & ٠ \\ ٠ & ل & ٠ \\ ٠ & ٠ & ل \end{bmatrix}$ مثل $\begin{bmatrix} ٥ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٥ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٥ \end{bmatrix}$

(٦) المصفوفة المحورة :

هـى المصفوفة التـى نحـصل عليهـا مـن المـصفوفة الأصـلية (أ) بتحويـل صـفوفها إلـى أعمـدة أو أعمـدتها إلـى صـفوف ، ويرمـز لهـا عـادة بـالمز ($أ^{\prime}$) ،

وبالتالى إذا كان لدينا المصفوفة (أ) من الرتبة (م × ن) فإن المصفوفة المحورة ($\text{أ}'$) تكون من الرتبة (ن × م) كالتالى:

$$\text{أ} = \begin{bmatrix} \text{أ}_{\text{١١}} & \text{أ}_{\text{٢١}} & \text{أ}_{\text{٣١}} \\ \text{أ}_{\text{١٢}} & \text{أ}_{\text{٢٢}} & \text{أ}_{\text{٣٢}} \end{bmatrix} \quad \text{فإن} \quad \text{أ}' = \begin{bmatrix} \text{أ}_{\text{١١}} & \text{أ}_{\text{١٢}} \\ \text{أ}_{\text{٢١}} & \text{أ}_{\text{٢٢}} \\ \text{أ}_{\text{٣١}} & \text{أ}_{\text{٣٢}} \end{bmatrix}$$

ويلاحظ على المصفوفة المحورة أن :

$$[\text{أ}']' = [\text{أ}]$$

أى أنه إذا تم تحوير المصفوفة المحورة تنتج المصفوفة الإصلية.

(٧) المصفوفة المتماثلة:

هى مصفوفة مربعة إذا تم تحويرها تنتج المصفوفة الأصلية، أو بمعنى آخر فإن عناصر صفوفها تماثل عناصر أعمدتها المناظرة. مثل المصفوفة التالية:

$$\text{أ} = \begin{bmatrix} \text{١} & \text{٢}- & \text{٣} \\ \text{٢}- & \text{٥} & \text{٧} \\ \text{٣} & \text{٧} & \text{٩} \end{bmatrix} \leftarrow \text{أ}' = \begin{bmatrix} \text{١} & \text{٢}- & \text{٣} \\ \text{٢}- & \text{٥} & \text{٧} \\ \text{٣} & \text{٧} & \text{٩} \end{bmatrix}$$

(٨) مصفوفة الصف الواحد (متجه الصف) :

هى المصفوفة التى تتكون من صف واحد وأى عدد من الأعمدة، فإذا كانت المصفوفة (أ) رتبتها (١ ، ن) فإن (أ) تسمى متجه صفر Row vector. وفى هذه الحالة فإننا عند كتابة عناصر المتجه الصفى (أ) نحذف دليل الصف –

لأنه ليس هناك إلا صف واحد – ونكتفى بكتابة دليل العمود وبذلك يصبح لكـــل عنصر دليل واحد فقط هو رقم العمود الواقع فيه العنصر كالتالى:

أ = $[أ_1 \quad أ_2 \quad أ_3]$ متجه صف من الرتبة (١ × ٣)

أ = $[أ_1 \quad أ_2 \quad أ_3 \quad أ_4]$ متجه صف من الرتبة (١ × ٤)

أ = $[أ_1 \quad أ_2 \quad أ_3 \cdots\cdots أ_ن]$ متجه صف من الرتبة (١ × ن)

(٩) مصفوفة العمود الواحد (متجه العمود) :

هى المصفوفة التى تتكون من عمود واحد وأى عدد من الصفوف، فإذا كانت المصفوفة (ب) رتبتها (م × ١) فإن (ب) تسمى متجه عمودى Column vector. وعند كتابة عناصر المتجه العمودى (ب) نحذف دليل العمود– لأنـــه ليس هناك إلا عمود واحد – ونكتفى بكتابة دليل الصف وبـــذلك يـــصبح لكـــل عنصر دليل واحد فقط هو رقم الصف الواقع فيه العنصر كالتالى:

$$ب = \begin{bmatrix} ب_1 \\ ب_2 \\ ب_3 \end{bmatrix}$$ متجة عمودى من الرتبة (٣ × ١)

$$ب = \begin{bmatrix} ب_1 \\ ب_2 \\ ب_3 \\ ب_4 \end{bmatrix}$$ متجه عمودى من الرتبة (٤ × ١)

$$ب = \begin{bmatrix} ب_1 \\ ب_2 \\ ب_3 \\ . \\ . \\ . \\ . \\ ب_ن \end{bmatrix}$$ متجة عمودى من الرتبة (ن × ١)

(١٠) المصفوفة المثلثية:

هى مصفوفة مربعة منقسمة إلى مثلثين، إحداهما (ويشمل القطر) يحتوى على أرقام والآخر جميع عناصره أصفار. ونذكر فيما يلى نوعين من المصفوفة المثلثية:

(أ) المصفوفة المثلثية العليا:

هى المصفوفة التى فيها العناصر القطرية والعناصر العليا تحتوى على أرقام وباقى العناصر أسفل القطر جميعها أصفار، كما بالمصفوفة التالية:

$$\begin{bmatrix} أ_{11} & أ_{21} & أ_{31} \\ . & أ_{22} & أ_{32} \\ . & . & أ_{33} \end{bmatrix} \leftarrow \text{مثل :} \begin{bmatrix} ١ & -٢ & ٥ \\ . & ٧ & ٤ \\ . & . & ٣ \end{bmatrix}$$

(ب) المصفوفة المثلثية السفلى :

هى المصفوفة التى فيها العناصر القطرية والعناصر السفلى تحتوى على أرقام وباقى العناصر أعلى القطر جميعها أصفار، كما بالمصفوفة التالية:

$$\begin{bmatrix} أ_{١١} & ٠ & ٠ \\ أ_{٢١} & أ_{٢٢} & ٠ \\ أ_{٣١} & أ_{٣٢} & أ_{٣٣} \end{bmatrix} \leftarrow \text{مثل :} \begin{bmatrix} ٧ & ٠ & ٠ \\ -٣ & ٢ & ٠ \\ ١ & ٤ & ٩ \end{bmatrix}$$

(١١) المصفوفة الأحادية (Singular Matrix):

هى المصفوفة المربعة التى قيمة محددها تساوى الصفر، كما بالمصفوفة أ = $\begin{bmatrix} ٥ & ٢ \\ ١٠ & ٤ \end{bmatrix}$ والتى تعتبر مصفوفة أحادية لأن:

$$\Delta_{أ} = \begin{vmatrix} ٥ & ٢ \\ ١٠ & ٤ \end{vmatrix} = ٢٠ - ٢٠ = \text{صفر}$$

وتلعب المصفوفة غير الأحادية دوراً هاماً فى إيجاد معكوس المصفوفة.

مثال (١) :

بين ما إذا كانت المصفوفات الآتية أحادية أم غير أحادية:

$$أ = \begin{bmatrix} ١ & ٢ & ٣ \\ ٢ & ٣ & ٤ \\ ٣ & ٥ & ٧ \end{bmatrix} \quad ، \quad ب = \begin{bmatrix} ١ & ٢ & ٣ \\ ٢ & ١ & ٠ \\ ٣ & ١ & ٥ \end{bmatrix}$$

الحـــل

لتحديد ما إذا كانت هذه المصفوفات أحادية أم غير أحادية نوجد قيمة محددها كالآتى:

$$|أ| = ١ \begin{vmatrix} ٣ & ٤ \\ ٥ & ٧ \end{vmatrix} - ٢ \begin{vmatrix} ٢ & ٤ \\ ٣ & ٧ \end{vmatrix} + ٣ \begin{vmatrix} ٢ & ٣ \\ ٣ & ٥ \end{vmatrix}$$

$= ١ (٢١ - ٢٠) - ٢ (١٤ - ١٢) + ٣ (١٠ - ٩)$

$= ١ - ٤ + ٣ =$ صفر

وحيث أن : $|أ|$ = صفر ، فإن المصفوفة (أ) أحادية.

وبالمثل نجد أن قيمة $|ب| = ١٨ \neq$ صفر

فتكون المصفوفة (ب) غير أحادية .

ثالثاً: جبر المصفوفات:

(*) تساوى المصفوفات:

يقال أن المصفوفتين $أ_{م ن}$ ، $ب_{م ن}$ متساويتان إذا تحقق الشرطين الآتيين معاً:

(١) رتبة المصفوفة $أ_{م ن}$ مساوية لرتبة المصفوفة $ب_{م ن}$، أى تحتويان على نفس العدد من الصفوف والأعمدة (أى لهما نفس الأبعاد).

(أ) كل عنصر من المصفوفة $أ_{م ن}$ يساوى نظيره فى المصفوفة $ب_{م×ن}$ (تساوى جميع العناصر المتناظرة فى المصفوفتين).

مثال (٢) :

إذا تساوت المصفوفتان :

$$\begin{bmatrix} أ + ب & ٢جـ + د \\ أ - ب & جـ - د \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣ & ٥ \\ ١ & ٤ \end{bmatrix}$$

فإن مضمون ذلك أن:

$أ + ب = ٣$

$٢جـ + د = ٥$

أ - ب = ١

ج - د = ٤

وعليه تكون المصفوفتان متساويتان فقط عندما :

أ = ٢ ، ب = ٣ ، ج = ٣ ، د = -١

مثال (٣) :

بفرض أن لدينا المصفوفات التالية:

$$أ = \begin{bmatrix} ٥ & ٦ \\ ٧ & -٢ \end{bmatrix} ، ب = \begin{bmatrix} ٠ & ١ & ٢ \\ ٣ & ٥ & ٧ \end{bmatrix} ، جـ = \begin{bmatrix} ٣ & ٥ \\ ٧ & ٤ \end{bmatrix}$$

نلاحظ أن أ ≠ ب حيث أن أبعاد أ ، ب مختلفة ، ولـــنفس الـــسبب فـــإن ب ≠ج . وكذلك فإن أ ≠ج لأن بعض العناصر المتناظرة غير متساوية.

(*) جمع وطرح المصفوفات :

يمكن جمع (طرح) عدد من المصفوفات إذا كانوا من نفس الرتبة (لهما نفس الأبعاد). فإن كان لدينا مصفوفتين أ ، ب لهما نفس الأبعاد (م × ن) فـــإن المجموع أ + ب (أو الفرق) هو مصفوفة لها نفس الأبعاد ونحصل عليها بجمع (طرح) العناصر المتناظرة فى المصفوفتين أ ، ب ، وطبقاً لهـــذا التعريـــف لا يمكن جمع (طرح) مصفوفتين ليس لهما نفس الأبعاد ويقـــال أن الجمـــع غيـــر معرف.

مثال (٤) :

إذا كان لديك المصفوفات التالية :

$$\text{أ} = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 3 \\ 6 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad ، \quad \text{ب} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 7 \\ 0 & -1 & 8 \\ 2 & 4 & 3 \end{bmatrix} \quad ، \quad \text{جـ} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 5 \\ -3 & 0 & 9 \\ -1 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

فأوجد : (١) أ + ب ، (٢) ب − ج ، (٣) ٢أ − ٣ ب + ج

الحــــل

$$(1)\quad \text{أ}+\text{ب} = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 3 \\ 6 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -3 & 7 \\ 0 & -1 & 8 \\ 2 & 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -5 & 10 \\ 6 & 0 & 12 \\ 3 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

$$(2)\quad \text{ب}-\text{جـ} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 7 \\ 0 & -1 & 8 \\ 2 & 4 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & 1 & 5 \\ -3 & 0 & 9 \\ -1 & 2 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 2 \\ 3 & -1 & -1 \\ 3 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$(3)\quad 2\text{أ}-3\text{ب}+\text{جـ} = 2\begin{bmatrix} 5 & -2 & 3 \\ 6 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} 1 & -3 & 7 \\ 0 & -1 & 8 \\ 2 & 4 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 1 & 5 \\ -3 & 0 & 9 \\ -1 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ١٠ & -٤ & ٦ \\ ١٢ & ٢ & ٨ \\ ٢ & -٢ & ٤ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -٣ & ٩ & -٢١ \\ ٠ & ٣ & -٢٤ \\ -٦ & -١٢ & -٩ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -٢ & ١ & ٥ \\ -٣ & ٠ & ٩ \\ -١ & ٢ & ٦ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٥ & ٦ & ١٠ \\ ٩ & ٥ & -٧ \\ -٥ & -١٢ & ١ \end{bmatrix}$$

مثال (٥) :

إذا كان:

$$ا = \begin{bmatrix} ١ & ٢ & ٣ \\ ٠ & -١ & ٣ \\ -١ & ١ & ٤ \end{bmatrix} \quad ، \quad ب = \begin{bmatrix} ٠ & ٣ & ٥ \\ ١ & ٤ & ٢ \\ ٢ & ٦ & -١ \end{bmatrix}$$

(١) أوجد ا′ ، ب′

(٢) أثبت أن : (ا′ + ب′) = (ا + ب)′

الحـــــل

(١)

$$ا' = \begin{bmatrix} ١ & ٠ & -١ \\ ٢ & -١ & ١ \\ ٢ & ٣ & ٤ \end{bmatrix} \quad ، \quad ب' = \begin{bmatrix} ٠ & ١ & ٢ \\ ٣ & ٤ & ٦ \\ ٥ & ٢ & -١ \end{bmatrix}$$

(٢) ا′ + ب′ = (ا+ب)′

الطرف الأيمن = ا′ + ب′

$$= \begin{bmatrix} ١ & ٠ & -١ \\ ٢ & -١ & ١ \\ ٢ & ٣ & ٤ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٠ & ١ & ٢ \\ ٣ & ٤ & ٦ \\ ٥ & ٢ & -١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & ١ & ١ \\ ٥ & ٣ & ٧ \\ ٧ & ٥ & ٣ \end{bmatrix}$$

الطرف الأيسر $= (\text{ا}+\text{ب})'$

$$(\text{ا}+\text{ب}) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 2 \\ 2 & 6 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 7 & 3 \end{bmatrix}$$

$$(\text{ا}+\text{ب})' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & 7 \\ 7 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

وبالتالى فإن :

$$\text{ا}' + \text{ب}' = (\text{ا}+\text{ب})'$$

مثال (٦) :

إذا كان : $\text{ا} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ ، $\text{ب} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -4 & -6 \end{bmatrix}$

فاحسب : $3\text{أ} - 5\text{ب} + 3I =$

$$= 3\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} - 5\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -4 & -6 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 6 & 9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -15 & -25 \\ 20 & 30 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 & -28 \\ 26 & 42 \end{bmatrix}$$

مثال (٧) :

$$أ = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} ،\quad ب = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} ،\quad جـ = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$$

أثبت أن : $أ' + ب' + جـ' = (أ + ب + جـ)'$

الحـــل

$$أ = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow أ' = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$ب = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \Leftrightarrow ب' = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}$$

$$جـ = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} \Leftrightarrow جـ' = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 6 \end{bmatrix}$$

الطرف الأيمن = $أ' + ب' + جـ'$

$$= \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -4 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 6 & 13 \end{bmatrix}$$

الطرف الأيسر = $(أ + ب + جـ)'$

$$= \left(\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} \right) = \left(\begin{bmatrix} 4 & -6 \\ 4 & 13 \end{bmatrix} \right)'$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ -6 & 13 \end{bmatrix}$$

أى أن : $ا' + ب' + جـ' = (ا + ب + جـ)'$

ويمكن إستنتاج الخواص الآتية من جمع ثلاث مصفوفات أ ، ب ، ج لهما نفس الأبعاد :

(١) $(ا + ب) + جـ = ا + (ب + جـ)$

(٢) أ + ب = ب + أ

(٣) أ + ٠ = ٠ + أ = أ (حيث ترمز. إلى المصفوفة الصفرية)

مثـــال (٨):

إذا كان لديك المصفوفات التالية :

$$ا = \begin{bmatrix} ٣ & ٨ \\ ٢- & ٥ \end{bmatrix} \quad ب = \begin{bmatrix} ٦ & ١ \\ ٠ & ٢- \end{bmatrix} \quad جـ = \begin{bmatrix} ١- & ٣ \\ ٢ & ٤ \end{bmatrix}$$

فأوجد كلاً من:

(١) ا + ب   (٤) ا − ب

(٢) ا + جـ   (٥) ا − جـ

(٣) ب + جـ   (٦) ب − جـ

الحـــــل

(١) $ا + ب = \begin{bmatrix} ٣ & ٨ \\ ٢- & ٥ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٦ & ١ \\ ٠ & ٢- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (٣+٦) & (٨+١) \\ (٢-+٠) & ٥+(٢-) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٩ & ٩ \\ ٢- & ٣ \end{bmatrix}$

(٢) $\text{ا}+\text{جـ} = \begin{bmatrix} ٣ & ٨ \\ -٢ & ٥ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -١ & ٣ \\ ٢ & ٤ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣+(-١) & (٨+٣) \\ -٢+٢ & ٥+٤ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢ & ١١ \\ ٠ & ٩ \end{bmatrix}$

(٣) $\text{ب}+\text{جـ} = \begin{bmatrix} ٦ & ١ \\ ٠ & -٢ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -١ & ٣ \\ ٢ & ٤ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٦+(-١) & (١+٣) \\ ٠+٢ & -٢+٤ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٥ & ٤ \\ ٢ & ٢ \end{bmatrix}$

(٤) $\text{ا}-\text{ب} = \begin{bmatrix} ٣ & ٨ \\ -٢ & ٥ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٦ & ١ \\ ٠ & -٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣-٦ & ٨-١ \\ -٢-٠ & ٥-(-٢) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -٣ & ٧ \\ -٢ & ٧ \end{bmatrix}$

(٥) $\text{ا}-\text{جـ} = \begin{bmatrix} ٣ & ٨ \\ -٢ & ٥ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -١ & ٣ \\ ٢ & ٤ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣-(-١) & ٨-٣ \\ -٢-٢ & ٥-٤ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٤ & ٥ \\ -٤ & ١ \end{bmatrix}$

(٦) $\text{ب}-\text{جـ} = \begin{bmatrix} ٦ & ١ \\ ٠ & -٢ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -١ & ٣ \\ ٢ & ٤ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٦-(-١) & ١-٣ \\ ٠-٢ & -٢-٤ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٧ & -٢ \\ -٢ & -٦ \end{bmatrix}$

مثال (٩) :

إذا كان لديك المصفوفات التالية :

$\text{ا} = \begin{bmatrix} ٢ & ٣ & -١ \\ ٥ & ٤ & ٠ \end{bmatrix}$ & $\text{ب} = \begin{bmatrix} ١ & ٢ & ٣ \\ ٤ & ٠ & -٢ \end{bmatrix}$ & $\text{جـ} = \begin{bmatrix} ٠ & ١ & ٢ \\ -٢ & ٣ & ١ \end{bmatrix}$

فأوجد كلاً من : (١) ا + ب (٢) ا-جـ (٣) ب+جـ (٤) ب-جـ

الحـــــل

(١) $\text{أ} + \text{ب} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 5 & 4 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 9 & 4 & -2 \end{bmatrix}$

(٢) $\text{أ} - \text{جـ} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 5 & 4 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

(٣) $\text{ب} + \text{جـ} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 6 & 3 & -1 \end{bmatrix}$

(٤) $\text{ب} - \text{جـ} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 2 & -3 & -3 \end{bmatrix}$

(*) الضرب القياسى :

حاصل ضرب أى عدد قياسى "هـ" مثلاً فى المصفوفة أ يُكتب (هـ أ) أو (أهـ). حيث تمثل (هـ أ) المصفوفة التى نحصل عليها بعد ضرب كل عنصر من عناصر أ فى العدد هـ، أى أن:

$$\text{هـ} \begin{bmatrix} \text{أ}_{11} & \text{أ}_{31} & \text{أ}_{31} \\ \text{أ}_{12} & \text{أ}_{22} & \text{أ}_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{هـ أ}_{11} & \text{هـ أ}_{31} & \text{هـ أ}_{31} \\ \text{هـ أ}_{12} & \text{هـ أ}_{22} & \text{هـ أ}_{32} \end{bmatrix}$$

ويمكن توضيح ذلك بمثال رقمى كالآتى:

$$5 \begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 3 & 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5(2) & 5(-1) & 5(4) \\ 5(3) & 5(0) & 5(5) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & -5 & 20 \\ 15 & 0 & 25 \end{bmatrix}$$

ملاحظة: إذا كانت أ ، ب مصفوفتان لها نفس الرتبة ، وكانت هـ مقدار ثابت فإنه يمكن إثبات أن : هـ (أ + ب) = هـ أ + هـ ب

(*) ضرب المتجهات:

إذا كان لدينا متجهان أ ، ب لهما نفس العدد من العناصر وبحيث أن المتجه أ يمثل متجه صفي والمتجه ب يمثل متجه عمودي كالآتي:

$$أ = [\, أ_{١} \quad أ_{٢} \quad \dots\dots\dots \quad أ_{ن} \,] \quad ، \quad ب = \begin{pmatrix} ب_{١} \\ ب_{٢} \\ \vdots \\ ب_{ن} \end{pmatrix}$$

فإن حاصل ضربها يكون مقدار ثابت عبارة عن مجموع حواصل ضرب كل عنصر من عناصر المتجه أ في العنصر المناظر له من عناصر المتجه ب ، فإذا رمزنا لهذا المقدار الثابت (حاصل الضرب) بالرمز جـ فإن :

$$جـ = أ.ب = [\, أ_{١} \quad أ_{٢} \quad \dots\dots\dots \quad أ_{ن} \,] \begin{pmatrix} ب_{١} \\ ب_{٢} \\ \vdots \\ ب_{ن} \end{pmatrix}$$

$$= أ_{١}\, ب_{١} + أ_{٢}\, ب_{٢} + \dots\dots\dots + أ_{ن}\, ب_{ن}$$

وواضح أن حاصل الضرب عبارة عن عدد (مقدار ثابت) وليس مصفوفة.

مثال (١٠):

إذا كان المتجهان أ ، ب كالتالى :

$$أ = \begin{bmatrix} ٢ & ٥ & -١ \end{bmatrix} \quad ، \quad ب = \begin{bmatrix} ١ \\ ٣ \\ ٠ \end{bmatrix}$$

فأوجد أ ب .

الحـــــل

$$أب = \begin{bmatrix} ٢ & ٥ & -١ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ١ \\ ٣ \\ ٠ \end{bmatrix} = ٢(١) + ٥(٣) - ١(٠) = ١٧$$

(*) ضرب المصفوفات :

يختلف الضرب في جبر المصفوفات عن الضرب فى الجبـــر العـــادى. ويرجع ذلك إلى عدم سريان قانون تبادل الحدود فى ضرب المصفوفات. أى أنه إذا استطعنا إيجاد حاصل ضرب مصفوفتين أ × ب فإننا قد لا نتمكن من إيجاد حاصل الضرب ب × أ . كما أن ب أ إن وجدت لن تساوى بالضرورة أ ب.

لكي نستطيع ضرب أى مصفوفتين أ × ب لابد وأن تكون المـــصفوفتان قابلتين للضرب فى هذا النظام، ويتحقق هذا فقط إذا كانت المصفوفة الأولـــى أ تحتوى على عدد من الأعمدة يساوى عدد الصفوف الذى تحتويـــه المـــصفوفة الثانية ب، والسبب فى ذلك أنه عند ضرب المصفوفات تضرب عناصـــر كـــل صف فى المصفوفة السابقة فى عناصر العمود المقابل فى المـــصفوفة اللاحقـــة ونجمع.

فإذا كان لدينا المصفوفة أ من الرتبة (م × ن) والمصفوفة ب من الرتبة (ن × ل) فإن حاصل الضرب يعطى المصفوفة جـ من الرتبة (م × ل).

فمثلاً حاصل ضرب المصفوفة أ من الرتبة (٢× ٣) فى المصفوفة ب من الرتبة (٣ × ٢) يعطى المصفوفة جـ من الرتبة (٢× ٢) كمايلى:

$$\begin{bmatrix} \text{أ}_{11} & \text{أ}_{21} & \text{أ}_{31} \\ \text{أ}_{12} & \text{أ}_{22} & \text{أ}_{32} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \text{ب}_{11} & \text{ب}_{21} \\ \text{ب}_{12} & \text{ب}_{22} \\ \text{ب}_{13} & \text{ب}_{23} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \text{ج}_{11} & \text{ج}_{21} \\ \text{ج}_{12} & \text{ج}_{22} \end{pmatrix}$$

وللحصول على عناصر المصفوفة جـ نجرى الآتى:

(١) العنصر جـ_{11} يساوى مجموع حواصل ضرب عناصر الصف الأول من المصفوفة أ × عناصر العمود الأول من المصفوفة ب ، أى أن:

$$\text{ج}_{11} = \text{أ}_{11}\,\text{ب}_{11} + \text{أ}_{21}\,\text{ب}_{12} + \text{أ}_{31}\,\text{ب}_{13}$$

(٢) العنصر جـ_{21} يساوى مجموع حواصل ضرب عناصر الصف الأول من المصفوفة أ × عناصر العمود الثانى من المصفوفة ب ، أى أن:

$$\text{ج}_{21} = \text{أ}_{11}\,\text{ب}_{21} + \text{أ}_{21}\,\text{ب}_{22} + \text{أ}_{31}\,\text{ب}_{23}$$

(٣) العنصر جـ_{12} يساوى مجموع حواصل ضرب عناصر الصف الثانى من المصفوفة أ × عناصر العمود الأول من المصفوفة ب ، أى أن :

$$\text{ج}_{12} = \text{أ}_{12}\,\text{ب}_{11} + \text{أ}_{22}\,\text{ب}_{12} + \text{أ}_{32}\,\text{ب}_{13}$$

(٤) العنصر جـ_{22} يساوى مجموع حواصل ضرب عناصر الصف الثانى من المصفوفة أ × عناصر العمود الثانى من المصفوفة ب ، أى أن :

$$\text{ج}_{22} = \text{أ}_{12}\,\text{ب}_{21} + \text{أ}_{22}\,\text{ب}_{22} + \text{أ}_{32}\,\text{ب}_{23}$$

ونوضح فيمايلى بعض الأمثلة المختلفة لعمليات ضرب مصفوفتين.

مثال (١١):

أوجد حاصل ضرب المصفوفات التاليتين:

$$\begin{bmatrix} ٤ & ١ \\ ٣ & ٧ \end{bmatrix} = \text{ب} \quad ، \quad \begin{bmatrix} ٥ & ٦ \\ ١ & ٥ \\ ٣ & ٤ \end{bmatrix} = \text{أ}$$

الحــــل

بما أن عدد أعمدة المصفوفة الأولى = عدد صفوف المصفوفة الثانية = ٢

فإنه يمكن إيجاد حاصل الضرب.

$$\begin{bmatrix} ٤ & ١ \\ ٣ & ٧ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ٥ & ٦ \\ ١ & ٥ \\ ٣ & ٤ \end{bmatrix} = \text{ب} \times \text{أ}$$

$$\begin{bmatrix} ٣٩ & ٤١ \\ ٢٣ & ١٢ \\ ٢٥ & ٢٥ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (٣\times٥)+(٤\times٦) & (٧\times٥)+(١\times٦) \\ (٣\times١)+(٤\times٥) & (٧\times١)+(١\times٥) \\ (٣\times٣)+(٤\times٤) & (٧\times٣)+(١\times٤) \end{bmatrix} =$$

مثال (١٢):

إذا كانت المصفوفتان :

$$\begin{bmatrix} ٠ & ٢ & ٣ \\ ٢ & ٤ & ١ \\ ١ & ١ & ٠ \end{bmatrix} = \text{ب} \quad ، \quad \begin{bmatrix} ٢ & ٠ & ١ \\ ١ & ٢ & ٣ \\ ٥ & ٠ & ٤ \end{bmatrix} = \text{أ}$$

فأوجد كلاً من : أ ب ، ب أ

الحـــل

$$\begin{bmatrix} ٠ & ٢ & ٣ \\ ٢ & ٤ & ١ \\ ١ & ١ & ٠ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ٢ & ٠ & ١ \\ ١ & ٢ & ٣ \\ ٥ & ٠ & ٤ \end{bmatrix} = \text{اب}$$

$$\begin{bmatrix} (١\times٢)+(٢\times٠)+(٠\times١) & (١\times٢)+(٤\times٠)+(٢\times١) & (٠\times٢)+(١\times٠)+(٣\times١) \\ (١\times١)+(٢\times٢)+(٠\times٣) & (١\times١)+(٤\times٢)+(٢\times٣) & (٠\times١)+(١\times٢)+(٣\times٣) \\ (١\times٥)+(٢\times٠)+(٠\times٤) & (١\times٥)+(٤\times٠)+(٢\times٤) & (٠\times٥)+(١\times٠)+(٣\times٤) \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} ٢ & ٤ & ٣ \\ ٥ & ١٥ & ١١ \\ ٥ & ١٣ & ١٢ \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} ٢ & ٠ & ١ \\ ١ & ٢ & ٣ \\ ٥ & ٠ & ٤ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٠ & ٢ & ٣ \\ ٢ & ٤ & ١ \\ ١ & ١ & ٠ \end{bmatrix} = \text{با}$$

$$\begin{bmatrix} (٥\times٠)+(١\times٢)+(٢\times٣) & (٠\times٠)+(٢\times٢)+(٠\times٣) & (٤\times٠)+(٣\times٢)+(١\times٣) \\ (٥\times٢)+(١\times٤)+(٢\times١) & (٠\times٢)+(٢\times٤)+(٠\times١) & (٤\times٢)+(٣\times٤)+(١\times١) \\ (٥\times١)+(١\times١)+(٢\times٠) & (٠\times١)+(٢\times١)+(٠\times٠) & (٤\times١)+(٣\times١)+(١\times٠) \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} ٨ & ٤ & ٩ \\ ١٦ & ٨ & ٢١ \\ ٦ & ٢ & ٧ \end{bmatrix} =$$

ويتضح من هذا المثال أن $\text{اب} \neq \text{با}$

مثال (١٣) :

أوجد حاصل ضرب المصفوفات التالية:

(أ) $$\begin{bmatrix} ١ & ٢ & ٣ \\ ٢ & ٠ & ٤ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ٠ & ٣ \\ ٤ & ٥ \end{bmatrix}$$

(ب) $$\begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ -١ & ٠ \\ ٤ & ١ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ٠ & ١ & ٤ \\ ٢ & -٢ & ٥ \end{bmatrix}$$

الحـــــل

(أ) $$\begin{bmatrix} ١ & ٢ & ٣ \\ ٢ & ٠ & ٤ \end{bmatrix}_{٢\times٣} \times \begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ٠ & ٣ \\ ٤ & ٥ \end{bmatrix}_{٣\times٢}$$

$$= \begin{bmatrix} (١\times١)+(٢\times٠)+(٣\times٤) & (١\times٢)+(٢\times٣)+(٣\times٥) \\ (٢\times١)+(٠\times٠)+(٤\times٤) & (٢\times٢)+(٠\times٣)+(٤\times٥) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ١٣ & ٢٣ \\ ١٨ & ٢٤ \end{bmatrix}$$

(ب) $$\begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ -١ & ٠ \\ ٤ & ١ \end{bmatrix}_{٣\times٢} \times \begin{bmatrix} ٠ & ١ & ٤ \\ ٢ & -٢ & ٥ \end{bmatrix}_{٢\times٣}$$

$$\begin{bmatrix} (٥\times٣)+(٤\times٢) & (٢-\times٣)+(١\times٢) & (٢\times٣)+(٠\times٢) \\ (٥\times٠)+(٤\times١-) & (٢-\times٠)+(١\times١-) & (٢\times٠)+(٠\times١-) \\ (٥\times١)+(٤\times٤) & (٢-\times١)+(١\times٤) & (٢\times١)+(٠\times٤) \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} ٢٣ & ٤- & ٦ \\ ٤- & ١- & ٠ \\ ٢١ & ٢ & ٢ \end{bmatrix} =$$

مثال (١٤) :

إذا كان :

$$\begin{bmatrix} ٧ & ٦ & ٣ \\ ١ & ٣- & ١- \\ ٠ & ١ & ٥- \end{bmatrix} = \text{ب} \qquad \begin{bmatrix} ٤ & ٢ & ٥ \\ ١ & ٦ & ١ \end{bmatrix} = \text{ا}$$

فأوجد : اب ، $\text{ب}^{٢}$

الحـــــل

$$= \begin{bmatrix} ٧ & ٦ & ٣ \\ ١ & ٣- & ١- \\ ٠ & ١ & ٥- \end{bmatrix}_{٣\times٣} \times \begin{bmatrix} ٤ & ٢ & ٥ \\ ١ & ٦ & ١ \end{bmatrix}_{٣\times٢} = \text{ا} \times \text{ب}$$

$$\begin{bmatrix} ٠\times٤+١\times٢+٧\times٥ & ١\times٤+(٣-)\times٢+٦\times٥ & (٥-)\times٤+(١-)\times٢+٣\times٥ \\ ٠\times١+١\times٦+٧\times١ & ١\times١+(٣-)\times٦+٦\times١ & (٥-)\times١+(١-)\times٦+٣\times١ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} ٣٧ & ٢٨ & ٧- \\ ١٣ & ١١- & ٨- \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} ٠+٢+٣٥ & ٤+٦-٣٠ & ٢٠-٢-١٥ \\ ٠+٦+٧ & ١+١٨-٦ & ٥-٦-٣ \end{pmatrix} =$$

ب^{2} = ب × ب

$$= \begin{bmatrix} 7 & 6 & 3 \\ 1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 7 & 6 & 3 \\ 1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (3\times7)+(6\times1)+(7\times0) & (3\times6)+(6\times-3)+(7\times1) & (3\times3)+(6\times-1)+(7\times-5) \\ (-1\times7)+(-3\times1)+(1\times0) & (-1\times6)+(-3\times-3)+(1\times1) & (-1\times3)+(-3\times-1)+(1\times-5) \\ (-5\times7)+(1\times1)+(0\times0) & (-5\times6)+(1\times-3)+(0\times1) & (-5\times3)+(1\times-1)+(0\times-5) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 21+6+0 & 18-18+7 & 9-6-35 \\ -7-3+0 & -6+9+1 & -3+3-5 \\ -35+1+0 & -30-3+0 & 15-1+0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 27 & 7 & -32 \\ -10 & 4 & -5 \\ -34 & -33 & -16 \end{bmatrix}$$

ملاحظات على ضرب المصفوفات:

إذا كان لدينا ثلاث مصفوفات أ ، ب ، ج ومقدار ثابت د ، فإنه يمكن سريان القواعد الآتية في ضرب المصفوفات:

(١) (أ ب) ج = أ (ب ج)

(٢) أ (ب + ج) = أ ب + أ ج

(٣) (أ + ب) ج = أ ج + ب ج

(٤) د (أ ب) = (د أ) ب = أ (د ب)

(٥) أ I = I أ = أ

حيث I مصفوفة الوحدة من الرتبة المناسبة.

(٦) أ (٠) = (٠) أ = (٠)

حيث (٠) المصفوفة الصفرية من الرتبة المناسبة.

(٧) إذا حصلنا من ضرب مصفوفتين على مصفوفة صفرية، فإن هـــذا لـــيس بالضرورة معناه أن أى من المصفوفتين المضروبتين مصفوفة صـــفرية،

وكمثال:

$$\begin{bmatrix} ١ & ١ \\ ٢ & ٢ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -٢ & ٣ & ٤ \\ ٢ & -٣ & -٤ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٠ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٠ \end{bmatrix}$$

المصفوفة المرافقة The Adjoint Matrix:

بفرض أن لدينا المصفوفة المربعة س فإنه يمكن تكـــوين المـــصفوفة المرافقـــة وسنرمز لها بالرمز $س_ق$ عن طريق إيجاد المحيدد المرافقة لكل عنـــصر مـــن عناصر المصفوفة س ثم ضربه فى :

١) إشارة موجبة إذا كان العنصر فى موقع زوجى (مجموع رقم صفه ورقم عموده يساوى رقم زوجى).

٢) إشارة سالبة إذا كان العنصر فى موقع فردى (مجموع رقم صفه ورقـــم عموده يساوى رقم فردى).

فإذا كان لدينا المصفوفة ص التالية:

$$ص = \begin{bmatrix} ٤ & ٢ \\ ٥ & -٣ \end{bmatrix}$$

فإنه يمكن إيجاد المحيدد المرافق لكل عنصر من عناصر ص حتى يمكن تكوين مصفوفة المرافقات كمايلي:

- محيدد ٤ = -٣ (العنصر المتبقى بعد شطب صف وعمود ٤)، ونظراً لأن الرقم ٤ موجود فى الصف الأول والعمود الأول فإن ١ + ١ = ٢ وهو رقم زوجى، فإنه يجب ضرب الناتج × إشارة موجبة كالتالى:

  ∴ مرافق ٤ = -٣ × (+) = -٣

- محيدد ٢ = ٥ (العنصر المتبقى بعد شطب صف وعمود ٢) ، ونظراً لأن ٢ موجود فى الصف الأول والعمود الثانى فإن ١ + ٢ = ٣ وهو رقم فردى، فإنه يجب ضرب الناتج × إشارة سالبة كالتالى:

  ∴ مرافق ٢ = ٥× (-) = -٥

- محيدد ٥ = ٢ (العنصر المتبقى بعد شطب صف وعمود ٥) ، ونظراً لوجود العنصر ٥ فى الصف الثانى والعمود الأول فإن ٢ + ١ = ٣ وهو رقم فردى، فإنه يتم ضرب الناتج × إشارة سالبة كالتالى:

  ∴ مرافق ٥ = ٢ × (-) = -٢

- محيدد -٣ = ٤ (العنصر المتبقى بعد شطب صف وعمود -٣) ، ونظـــراً لوجود -٣ فى الصف الثانى والعمود الثانى فإن ٢ + ٢ = ٤ وهـــو رقـــم زوجى، فإنه. يتم ضرب الناتج × إشارة موجبة كالتالى:

∴ مرافق -٣ = ٤ × (+) = ٤

وبذلك تكون المصفوفة المرافقة صن فى الصورة التالية:

$$ص_ن = \begin{bmatrix} -٥ & -٣ \\ ٤ & -٢ \end{bmatrix}$$

كذلك إذا كان لدينا المصفوفة أ التالية ونرغب فى الحصول على المصفوفة المرافقة لها:

$$أ = \begin{bmatrix} ١ & ٢ & ٣ \\ ٢ & ٣ & ٢ \\ ٣ & ٣ & ٤ \end{bmatrix}$$

- محيدد ٣ = $\begin{vmatrix} ٢ & ٣ \\ ٣ & ٣ \end{vmatrix}$ = ٩ − ٦ = ٣ ، وحيث أن ٣ تقع فـــى الـــصف الأول والعمود الأول فإن ١ + ١ = ٢ وهو رقم زوجى فيأخذ إشـــارة (+) ليكون مرافق ٣ = + ٣ = ٣.
- محيدد ٢ = $\begin{vmatrix} ٢ & ٢ \\ ٣ & ٤ \end{vmatrix}$ = ٦ − ٨ = -٢ ، وحيث أن ٢ تقع فـــى الـــصف الأول والعمود الثانى فإن ١ + ٢ = ٣ وهو رقم فردى فيأخـــذ إشـــارة (−) ليكون مرافق ٢ = − (-٢) = ٢.

• محيدد ١ = $\begin{vmatrix} ٣ & ٢ \\ ٣ & ٤ \end{vmatrix}$ = ٦ – ١٢ = –٦ ، وحيث أن ١ يقع فى الصف الأول والعمود الثالث فإن ١ + ٣ = ٤ وهو رقم زوجى فيأخذ إشارة (+) ليكون مرافق ١ = + (–٦) = –٦.

• محيدد ٢ = $\begin{vmatrix} ١ & ٢ \\ ٣ & ٣ \end{vmatrix}$ = ٦ – ٣ = ٣ ، وحيث أن ٢ يقع فى الصف الثانى والعمود الأول فإن ٢ + ١ = ٣ وهو رقم فردى فيأخذ إشارة (–) ليكون مرافق ٢ = – (٣) = –٣.

• محيدد ٣ = $\begin{vmatrix} ١ & ٣ \\ ٣ & ٤ \end{vmatrix}$ = ٩ – ٤ = ٥ ، وحيث أن ٣ يقع فى الصف الثانى والعمود الثانى فإن ٢ + ٢ = ٤ وهو رقم زوجى فيأخذ إشارة (+) ليكون مرافق ٣ = + (٥) = ٥.

• محيدد ٢ = $\begin{vmatrix} ٢ & ٣ \\ ٣ & ٤ \end{vmatrix}$ = ٩ – ٨ = ١ ، وحيث أن ٢ يقع فى الصف الثانى والعمود الثالث فإن ٢ + ٣ = ٥ وهو رقم فردى فيأخذ إشارة (–) ليكون مرافق ٢ = – (١) = –١.

• محيدد ٤ = $\begin{vmatrix} ١ & ٢ \\ ٢ & ٣ \end{vmatrix}$ = ٤ – ٣ = ١ ، وحيث أن ٤ يقع فى الصف الثالث والعمود الأول فإن ٣ + ١ = ٤ وهو رقم زوجى فيأخذ إشارة (+) ليكون مرافق ٤ = + (١) = ١.

- محيدد ٣ = $\begin{vmatrix} ١ & ٣ \\ ٢ & ٢ \end{vmatrix}$ = ٦ − ٢ = ٤ ، وحيث أن ٣ يقع فـي الـصف الثالث والعمود الثانى فإن ٣ + ٢ = ٥ وهو رقم فردى فيأخذ إشـارة (−) ليكون مرافق ٣ = −٤.
- محيدد ٣ = $\begin{vmatrix} ٢ & ٣ \\ ٣ & ٢ \end{vmatrix}$ = ٩ − ٤ = ٥ ، وحيث أن ٣ يقع فـي الـصف الثالث والعمود الثالث فإن ٣ + ٣ = ٦ وهو رقم زوجى فيأخذ إشـارة (+) ليكون مرافق ٣ = ٥.

وبذلك تكون المصفوفة المرافقة أ$_ن$ فى الصورة التالية:

$$\begin{bmatrix} ٦- & ٢ & ٣ \\ ١- & ٥ & ٣- \\ ٥ & ٤- & ١ \end{bmatrix} = أ_ن$$

معكوس (مقلوب) المصفوفة Inverse of the Matrrix

لقد سبق أن درسنا جمع وطرح وضرب المصفوفات. ويتعين علينا الآن أن نتعلم بعض الشئ عن قسمة المصفوفات. فنحن نعلم مـن دراسـتنا للجبـر العادى أن أى مقدار ل لا يساوى صفراً له مقلوب أو معكوس:

$$\frac{١}{ل} = ل^{-١}$$

ويعنى هذا المعكوس: ل ل$^{-١}$ = ل$^{-١}$ ل = ١ وعليه فإن القسمة ليست إلا ضرب فى مقلوب المقسوم عليه. وفى جبر المصفوفات لا نعرف القسمة فى حد ذاتها ولكن فى بعض الحالات نستطيع أن نحدد معكوس المـصفوفة. ويكـون للمصفوفة معكوس إذا كانت مربعة وغير أحادية، وتعتبر المـصفوفة أحاديـة

(Singular) إذا كان محددها يساوى صفراً. وبمعنى آخر فإن المصفوفات غير الأحادية تكون مصفوفات مربعة رتبتها تساوى عدد صفوفها (أو أعمدتها). وعليه فإنه يكون للمصفوفة أ معكوساً إذا كانت أ مربعة وكان ر (أ) = ن حيث ن تمثل عدد صفوف (أو أعمدة) أ.

وهناك عدداً من الطرق لإيجاد معكوس المصفوفة سوف نناقش منها طريقتين : طريقة العمليات الأولية، وطريقة المرافقات.

- **إيجاد معكوس المصفوفة باستخدام المرافقات:**

يمكن إيجاد معكوس مصفوفة س باستخدام طريقة المرافقات باتباع الخطوات التالية:

١- نحدد قيمة محدد المصفوفة س ($\Delta_{س}$)، فإذا كانت قيمة هذا المحدد تساوى صفر فتكون المصفوفة س أحادية، أى لا يوجد لها معكوس. أما إذا كانت قيمة المحدد لا تساوى صفر فنستكمل بقية الخطوات كالتالى.

٢- إيجاد مصفوفة المرافقات وذلك باستبدال كل عنصر من عناصر المصفوفة س بمرافقه فنحصل على مصفوفة المرافقات.

٣- تحوير مصفوفة المرافقات للحصول على مصفوفة المرافقات المحورة.

٤- إيجاد معكوس المصفوفة س بقسمة كل عنصر من عناصر مصفوفة المرافقات المحورة على قيمة محدد المصفوفة ($\Delta_{س}$) فنحصل على $س^{-1}$.

ملاحظة :

عند إيجاد مرافق كل عنصر فإن الإشارات تتوزع كالتالى للتسهيل:

$$\begin{bmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{bmatrix} \quad \text{أو} \quad \begin{bmatrix} - & + \\ + & - \end{bmatrix}$$

مثال (١٥) :

أوجد معكوس المصفوفات التالية:

(١) $\text{ا} = \begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ ٤ & ١- \end{bmatrix}$ ، (٢) $\text{ب} = \begin{bmatrix} ٢- & ٤- \\ ٥ & ١١ \end{bmatrix}$

(٣) $\text{س} = \begin{bmatrix} ١- & ٣ & ١ \\ ٦ & ٠ & ٤ \\ ٣- & ٢- & ٥ \end{bmatrix}$ ، (٤) $\text{ص} = \begin{bmatrix} ١ & ٢ & ٤ \\ ٣ & ٢ & ٦ \\ ٤ & ١ & ١ \end{bmatrix}$

الحـــــل

(١) $\text{ا} = \begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ ٤ & ١- \end{bmatrix}$

(١) إيجاد قيمة محدد المصفوفة (Δ) :

$$\Delta = ٢ \times ٤ - ٣ \times (-١) = ١١$$

(٢) إيجاد مصفوفة المرافقات:

مرافق ٢ = + (٤) = ٤

مرافق ٣ = − (−١) = ١

$$\begin{bmatrix} ١ & ٤ \\ ٢ & ٣- \end{bmatrix}$$

مرافق −١ = − (٣) = −٣

مرافق ٤ = + (٢) = ٢

(٣) تحوير مصفوفة المرافقات (ا´):

$$\begin{bmatrix} ٣- & ٤ \\ ٢ & ١ \end{bmatrix}$$

(٤) معكوس المصفوفة ا(ا^−١^) = مصفوفة المرافقات المحورة ÷ (Δ) :

$$\begin{bmatrix} \frac{٣-}{١١} & \frac{٤}{١١} \\ \frac{٢}{١١} & \frac{١}{١١} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣- & ٤ \\ ٢ & ١ \end{bmatrix} \frac{١}{١١} = {}^{١-}ا$$

$$\begin{bmatrix} ٢- & ٤- \\ ٥ & ١١ \end{bmatrix} = \text{ب} \quad (٢)$$

(١) إيجاد قيمة محدد المصفوفة (Δ) :

$$٢ = ١١ \times (٢-) - ٥ \times ٤- = \Delta$$

(٢) إيجاد مصفوفة المرافقات:

مرافق -٤ = + (٥) = ٥

مرافق -٢ = - (١١) = -١١

مرافق ١١ = - (-٢) = ٢

مرافق ٥ = + (-٤) = -٤

$$\begin{bmatrix} -١١ & ٥ \\ -٤ & ٢ \end{bmatrix}$$

(٣) تحوير مصفوفة المرافقات (ب´):

$$\begin{bmatrix} ٢ & ٥ \\ -٤ & -١١ \end{bmatrix}$$

(٤) معكوس المصفوفة ب (ب$^{-١}$) = مصفوفة المرافقات المحورة ÷ (Δ) :

$$ب^{-١} = \frac{١}{٢} \begin{bmatrix} ٢ & ٥ \\ -٤ & -١١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & \frac{٥}{٢} \\ -٢ & \frac{-١١}{٢} \end{bmatrix}$$

---

٠ + (-١٢) + (-٣٦) = -٤٨

$$\begin{matrix} ٣ & ١ \\ ٠ & ٤ \\ -٢ & ٥ \end{matrix} \begin{bmatrix} -١ & ٣ & ١ \\ ٦ & ٠ & ٤ \\ -٣ & -٢ & ٥ \end{bmatrix} = س \quad (٣)$$

٠ + ٩٠ + ٨ = ٩٨

(١) قيمة محدد المصفوفة (Δ) = ٩٨ - (- ٤٨) = ١٤٦

(٢) إيجاد مصفوفة المرافقات :

مرافق (١) $= (+)\begin{vmatrix} 0 & 6 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = (+)\left[0 - (-12)\right] = +(12) = 12$

مرافق (٣) $= (-)\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} = (-)\left[-12 - (30)\right] = -(-42) = 42$

مرافق (-١) $= (+)\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = (+)\left[-8 - 0\right] = +(-8) = -8$

مرافق (٤) $= (-)\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = (-)\left[-9 - (2)\right] = -(-11) = 11$

مرافق (٠) $= (+)\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} = (+)\left[-3 - (-5)\right] = +(2) = 2$

مرافق (٦) $= (-)\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = (-)\left[-2 - 15\right] = -(-17) = 17$

مرافق (٥) $= (+)\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} = (+)\left[18 - 0\right] = +(18) = 18$

مرافق (-٢) $= (-)\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = (-)\left[6 - (-4)\right] = -(10) = -10$

مرافق (-٣) $= (+)\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = (+)\left[0 - 12\right] = +(-12) = -12$

مصفوفة المرافقات = $\begin{bmatrix} ٨- & ٤٢ & ١٢ \\ ١٧ & ٢ & ١١ \\ ١٢- & ١٠- & ١٨ \end{bmatrix}$

(٣) تحوير مصفوفة المرافقات (س٘):

$$\begin{bmatrix} ١٨ & ١١ & ١٢ \\ ١٠- & ٢ & ٤٢ \\ ١٢- & ١٧ & ٨- \end{bmatrix}$$

(٤) معكوس المصفوفة س (س$^{-١}$) = مصفوفة المرافقات المحورة ÷ (Δ) :

$$\begin{bmatrix} \frac{١٨}{١٤٦} & \frac{١١}{١٤٦} & \frac{١٢}{١٤٦} \\ \frac{١٠-}{١٤٦} & \frac{٢}{١٤٦} & \frac{٤٢}{١٤٦} \\ \frac{١٢-}{١٤٦} & \frac{١٧}{١٤٦} & \frac{٨-}{١٤٦} \end{bmatrix} = \text{س}^{-١} \therefore$$

$٦٢ = ٤٨ + ١٢ + ٢$

$$\begin{matrix} ٢ & ٤ \\ ٢ & ٦ \\ ١ & ١ \end{matrix}\begin{bmatrix} ١ & ٣ & ٤ \\ ٣ & ٢ & ٦ \\ ٤ & ١ & ١ \end{bmatrix} = \text{ص} = \text{س} \quad (٤)$$

$٤٤ = ٦ + ٦ + ٣٢$

(١) قيمة محدد المصفوفة (Δ) = ٤٤ – ٦٢ = – ١٨

(٢) إيجاد مصفوفة المرافقات :

مرافق (٤) = (+) $\begin{vmatrix} ٣ & ٢ \\ ٤ & ١ \end{vmatrix}$ = (+) [٨ − ٣] = + (٥) = ٥

مرافق (٢) = (−) $\begin{vmatrix} ٣ & ٦ \\ ٤ & ١ \end{vmatrix}$ = (−) [٢٤ − ٣] = − (−٢١) = −٢١

مرافق (١) = (+) $\begin{vmatrix} ٢ & ٦ \\ ١ & ١ \end{vmatrix}$ = (+) [٦ − ٢] = + (٤) = ٤

مرافق (٦) = (−) $\begin{vmatrix} ١ & ٢ \\ ٤ & ١ \end{vmatrix}$ = (−) [٨ − ١] = − (٧) = −٧

مرافق (٢) = (+) $\begin{vmatrix} ١ & ٤ \\ ٤ & ١ \end{vmatrix}$ = (+) [١٦ − ١] = + (١٥) = ١٥

مرافق (٣) = (−) $\begin{vmatrix} ٢ & ٤ \\ ١ & ١ \end{vmatrix}$ = (−) [٤ − ٢] = − (٢) = −٢

مرافق (١) = (+) $\begin{vmatrix} ١ & ٢ \\ ٣ & ٢ \end{vmatrix}$ = (+) [٦ − ٢] = + (٤) = ٤

مرافق (١) = (−) $\begin{vmatrix} ١ & ٤ \\ ٣ & ٦ \end{vmatrix}$ = (−) [١٢ − ٦] = − (٦) = −٦

مرافق (٤) = (+) $\begin{vmatrix} ٢ & ٤ \\ ٢ & ٦ \end{vmatrix}$ = (+) [٨ − ١٢] = + (−٤) = −٤

مصفوفة المرافقات = $\begin{bmatrix} ٥ & ٢١- & ٤ \\ ٧- & ١٥ & ٢- \\ ٤ & ٦- & ٤- \end{bmatrix}$

(٣) تحوير مصفوفة المرافقات (ص´):

$$\begin{bmatrix} ٥ & ٧- & ٤ \\ ٢١- & ١٥ & ٦- \\ ٤ & ٢- & ٤- \end{bmatrix}$$

(٤) معكوس المصفوفة ص (ص$^{-١}$) = مصفوفة المرافقات المحورة ÷ (Δ) :

$$\therefore \text{ص}^{-١} = \begin{bmatrix} \frac{٥}{١٨-} & \frac{٧}{١٨} & \frac{٤}{١٨-} \\ \frac{٢١}{١٨} & \frac{١٥}{١٨-} & \frac{٦}{١٨} \\ \frac{٤}{١٨-} & \frac{٢}{١٨} & \frac{٤}{١٨} \end{bmatrix}$$

حل المعادلات الخطية باستخدام المصفوفات:

يقصد بنظام المعادلات الخطية مجموعة من المعـــادلات التـــى تأخـــذ الصورة الآتية :

$أ_{١١} س_{١} + أ_{٢١} س_{٢} + \ldots\ldots + أ_{ن١} س_{ن} = ث_{١}$

$أ_{١٢} س_{١} + أ_{٢٢} س_{٢} + \ldots\ldots + أ_{ن٢} س_{ن} = ث_{٢}$

$\vdots$

$أ_{م١} س_{١} + أ_{م٢} س_{٢} + \ldots\ldots + أ_{م ن} س_{ن} = ث_{م}$

ويحتوى هذا النظام على عدد (ن) من المجاهيل وعدد (م) من المعادلات. إلا أن (ن) لا تساوى بالضرورة (م). ويسمى النظام متجانس (homogenous) إذا كانت الثوابت $ث_{١} = ث_{٢} = \dots\dots\dots = ث_{ن} = ٠$ ، أما إذا كانت أى واحدة من الثوابت لا تساوى صفراً فإن النظام يكون غير متجانس (non-homogenous).

ويمكن التعبير عن نظام المعادلات السابقة فى صيغة نظام من معادلات المصفوفات كالتالى:

$$\begin{pmatrix} أ_{١١} & أ_{٢١} & \cdots & أ_{١ن} \\ أ_{١٢} & أ_{٢٢} & \cdots & أ_{٢ن} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ أ_{م١} & أ_{م٢} & \cdots & أ_{م ن} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} س_{١} \\ س_{٢} \\ \vdots \\ س_{ن} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ث_{١} \\ ث_{٢} \\ \vdots \\ ث_{م} \end{pmatrix}$$

ويمكن اختصار النظام السابق فى المعادلة: أ. س = ث ، حيث تمثل أ مصفوفة المعاملات وهى مصفوفة من الدرجة م × ن :

$$أ = \begin{pmatrix} أ_{١١} & أ_{٢١} & \cdots & أ_{١ن} \\ أ_{١٢} & أ_{٢٢} & \cdots & أ_{٢ن} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ أ_{م١} & أ_{م٢} & \cdots & أ_{م ن} \end{pmatrix}$$

ويمثل س متجه المجاهيل وهو من الدرجة ن × ١، أما ث فيمثل متجه القيم الثابتة وهو من الدرجة م × ١:

$$س = \begin{pmatrix} س_١ \\ س_٢ \\ \vdots \\ س_ن \end{pmatrix} \quad ، \quad ث = \begin{pmatrix} ث_١ \\ ث_٢ \\ \vdots \\ ث_م \end{pmatrix}$$

ويمكن استخدام المصفوفات بطرق عديدة فى حل نظام المعادلات الخطية السابق، وسوف نتناول بالشرح طريقة معكوس المصفوفة لحل المعادلات الخطية.

حل المعادلات الخطية باستخدام معكوس المصفوفة

يتضح مما سبق أن نظام المعادلات الخطية يمكن وصفه بمعادلة المصفوفات الآتية: أ س = ث.

ويمكن استخدام طريقة معكوس المصفوفة فى حل هذا النظام إذا توافرت الشروط الآتية:

(١) إذا كان النظام غير متجانس أى إذا كانت ث ≠ صفر، بمعنى أن أى واحد على الأقل من الثوابت لا يساوى صفراً.

(٢) إذا كانت المصفوفة أ مربعة أى من درجة ن × ن، وكان كل من المتجهين س ، ث من الدرجة ن × ١.

(٣) إذا كانت المصفوفة أ غير أحادية (non- Singular) أى كانت |أ| ≠ صفر، فيكون من الممكن إيجاد معكوس (أ) أى ($أ^{-1}$).

وباختصار فإنه يمكن إستخدام طريقة معكوس المصفوفة فى حل المعادلات الخطية فقط فى تلك الحالات التى يكون فيها عدد المعادلات مساوياً لعدد المجاهيل، وتكون رتبة مصفوفة المعاملات أ مساوية لعدد المعادلات (وكذلك لعدد المجاهيل) : ر (أ) = ن .

فإذا كان من الممكن تطبيق طريقة معكوس المصفوفة فإنه بالضرب المسبق فى $أ^{-1}$ للمعادلة أ س = ث نحصل على:

$$أ^{-1}\ أ\ س = أ^{-1}\ ث$$

$$\text{فيكون}\quad I\ س = أ^{-1}\ ث$$

$$\text{وعليه فإن :}\quad س = أ^{-1}\ ث$$

وتعطى المعادلة الأخيرة حلاً لنظام المعادلات الخطية. ويتلخص هذا الحل فى إيجاد معكوس مصفوفة المعاملات وضرب هذا المعكوس فى متجه الثوابت كما بالخطوات التالية:

١- تكوين مصفوفة المعاملات (أ).

٢- إيجاد معكوس مصفوفة المعاملات ($أ^{-1}$) بالخطوات الأربعة السابق ذكرها.

٣- $\begin{pmatrix} \text{مصفوفة} \\ \text{المجاهيل} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{معكوس مصفوفة} \\ \text{المعاملات} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \text{متجه الثوابت} \end{pmatrix}$

مثال (١٦):

حل المعادلات الآتية باستخدام المصفوفات:

(أ) ٢س + ٣ ص = ١٣ ‏‏ (ب) ٣ س − ص = ٤

٥س − ٤ ص = −٢ ‏‏ ٢س = ٢ − ٥ ص

الحـــــل

(أ) ٢ س + ٣ ص = ١٣

٥ س − ٤ ص = −٢

(I) تكوين مصفوفة المعاملات (أ) = $\begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ٥ & -٤ \end{bmatrix}$

(II) إيجاد معكوس مصفوفة المعاملات ($أ^{-١}$) :

(١) Δ = (٢ × −٤) − (٣ × ٥) = −٢٣

(٢) مصفوفة المرافقات :

مرافق ٢ = + (−٤) = −٤ ‏‏ مرافق ٣ = − (٥) = − ٥

مرافق ٥ = − (٣) = −٣ ‏‏ مرافق −٤ = + (٢) = ٢

$$\begin{bmatrix} -٤ & -٥ \\ -٣ & ٢ \end{bmatrix}$$

(٣) تحوير مصفوفة المرافقات:

$$\begin{bmatrix} -٤ & -٣ \\ -٥ & ٢ \end{bmatrix}$$

(٤) معكوس المصفوفة = مصفوفة المرافقات المحورة ÷ (Δ)

$$أ^{-1} = \frac{١}{-٢٣}\begin{bmatrix} -٤ & -٣ \\ -٥ & ٢ \end{bmatrix}$$

$$(III)\quad \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \frac{١}{-٢٣}\begin{bmatrix} -٤ & -٣ \\ -٥ & ٢ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ١٣ \\ -٢ \end{bmatrix}$$

$$\therefore س = \frac{١}{-٢٣}\left[(-٤ \times ١٣) + (-٣ \times -٢)\right] = ٢$$

$$ص = \frac{١}{-٢٣}\left[(-٥ \times ١٣) + (٢ \times -٢)\right] = ٣$$

$\therefore$ س = ٢ ، ص = ٣

(ب) ٣ س − ص = ٤

٢ س = ٢ − ٥ ص

الحـــــــــل

*** يتم أولاً ترتيب المعادلات كالآتى:**

٣ س − ص = ٤

٢ س + ٥ ص = ٢

(I) تكوين مصفوفة المعاملات (أ) :

$$\begin{bmatrix} ٣ & -١ \\ ٢ & ٥ \end{bmatrix}$$

(II) إيجاد معكوس مصفوفة المعاملات ($أ^{-1}$) :

(١) $\Delta = ٣ \times ٥ - (-١) \times ٢ = ١٧$

(٢) مصفوفة المرافقات:

مرافق ٣ = + (٥) = ٥

مرافق -١ = - (٢) = -٢

مرافق ٢ = - (-١) = ١

مرافق ٥ = + (٣) = ٣

$$\leftarrow \begin{bmatrix} ٥ & -٢ \\ ١ & ٣ \end{bmatrix}$$

(٣) تحوير مصفوفة المرافقات : $\begin{bmatrix} ٥ & ١ \\ -٢ & ٣ \end{bmatrix}$

(٤) معكوس المصفوفة $(أ^{-١}) = \frac{١}{١٧}\begin{bmatrix} ٥ & ١ \\ -٢ & ٣ \end{bmatrix}$

(III) $\begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \frac{١}{١٧}\begin{bmatrix} ٥ & ١ \\ -٢ & ٣ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ٤ \\ ٢ \end{bmatrix}$

$\therefore$ س $= \frac{١}{١٧}\left[(٥\times٤) + (١\times٢)\right] = \frac{٢٢}{١٧}$

$\therefore$ ص $= \frac{١}{١٧}\left[(-٢\times٤) + (٣\times٢)\right] = \frac{-٢}{١٧}$

$\therefore$ س $= \frac{٢٢}{١٧}$ ، ص $= \frac{-٢}{١٧}$

مثال (١٧):

حل المعادلات الآتية باستخدام المصفوفات:

(أ)
٣ س + ٤ ص + ٢ ع = ٢
٤ س + ٥ ص + ٣ ع = ٥
٥ س + ٧ ص + ٤ ع = ٧

(ب)
٢ س − ٣ ص + ٢ ع = ٤
س + ٤ ص - ٣ ع = ٥
٣ س + ٢ ص + ع = ٧

الحـــل

٣ س + ٤ ص + ٢ ع = ٢
(أ) ٤ س + ٥ ص + ٣ ع = ٥
٥ س + ٧ ص + ٤ ع = ٧

(I) تكوين مصفوفة المعاملات (أ) :

$$\begin{bmatrix} ٢ & ٤ & ٣ \\ ٣ & ٥ & ٤ \\ ٤ & ٧ & ٥ \end{bmatrix}$$

(II) إيجاد معكوس مصفوفة المعاملات (أ$^{-١}$) :

(١) إيجاد قيمة محدد المصفوفة (Δ) :

٥٠ + ٦٣ + ٦٤ = ١٧٧

$$\begin{array}{cc} ٤ & ٣ \\ ٥ & ٤ \\ ٧ & ٥ \end{array}\begin{bmatrix} ٢ & ٤ & ٣ \\ ٣ & ٥ & ٤ \\ ٤ & ٧ & ٥ \end{bmatrix}$$

٦٠ + ٦٠ + ٥٦ = ١٧٦

Δ = ١٧٦ − ١٧٧ = ١-

(٢) إيجاد مصفوفة المرافقات :

مرافق (٣) $= (+)\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 7 & 4 \end{vmatrix} = (+)[20 - 21] = +(-1) = -1$

مرافق (٤) $= (-)\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = (-)[16 - 15] = -(1) = -1$

مرافق (٢) $= (+)\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = (+)[28 - 25] = +(3) = 3$

مرافق (٤) $= (-)\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 7 & 4 \end{vmatrix} = (-)[16 - 14] = -(2) = -2$

مرافق (٥) $= (+)\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = (+)[12 - 10] = +(2) = 2$

مرافق (٣) $= (-)\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = (-)[21 - 20] = -(1) = -1$

مرافق (٥) $= (+)\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = (+)[12 - 10] = +(2) = 2$

مرافق (٧) $= (-)\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = (-)[9 - 8] = -(1) = -1$

مرافق (٤) $= (+)\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = (+)[15 - 16] = +(-1) = -1$

∴ مصفوفة المرافقات = $\begin{bmatrix} -١ & -١ & ٣ \\ -٢ & ٢ & -١ \\ ٢ & -١ & -١ \end{bmatrix}$

(٣) تحوير مصفوفة المرافقات:

$$\begin{bmatrix} -١ & -٢ & ٢ \\ -١ & ٢ & -١ \\ ٣ & -١ & -١ \end{bmatrix}$$

(٤) معكوس المصفوفة $(\text{أ}^{-١}) = \frac{١}{-١} \times \begin{bmatrix} -١ & -٢ & ٢ \\ -١ & ٢ & -١ \\ ٣ & -١ & -١ \end{bmatrix}$

(III) $\begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \\ \text{ع} \end{bmatrix} = \frac{١}{-١} \times \begin{bmatrix} -١ & -٢ & ٢ \\ -١ & ٢ & -١ \\ ٣ & -١ & -١ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ٢ \\ ٥ \\ ٧ \end{bmatrix}$

$\text{س} = \frac{١}{-١} \times [-١\times٢ + -٢\times٥ + ٢\times٧] = -٢$

$\text{ص} = \frac{١}{-١} \times [-١\times٢ + ٢\times٥ + -١\times٧] = -١$

$\text{ع} = \frac{١}{-١} \times [٣\times٢ + -١\times٥ + -١\times٧] = ٦$

س = -٢ ، ص = -١ ، ع = ٦

(ب) ٢ س – ٣ ص + ٢ ع = ٤

س + ٤ ص – ٣ ع = ٥

٣ س + ٢ ص + ع = ٧

(I) تكوين مصفوفة المعاملات (أ)

$$\begin{bmatrix} ٢ & ٣- & ٢ \\ ٣- & ٤ & ١ \\ ١ & ٢ & ٣ \end{bmatrix}$$

(II) إيجاد معكوس مصفوفة المعاملات (أ$^{-١}$) :

(١) إيجاد قيمة محدد المصفوفة (Δ) :

٢٤ + (–١٢) + (–٣) = ٩

$$\begin{array}{cc} ٣- & ٢ \\ ٤ & ١ \\ ٢ & ٣ \end{array} \begin{bmatrix} ٢ & ٣- & ١ \\ ٣- & ٤ & ١ \\ ١ & ٢ & ٣ \end{bmatrix}$$

٨ + ٢٧ + ٤ = ٣٩

Δ = ٣٩ – ٩ = ٣٠

(٢) إيجاد مصفوفة المرافقات :

مرافق (٢) = $(+)\begin{vmatrix} ٤ & -٣ \\ ٢ & ١ \end{vmatrix} = (+)\left[٤ - (-٦)\right] = +(١٠) = ١٠$

مرافق (−٣) = $(-)\begin{vmatrix} ١ & -٣ \\ ٣ & ١ \end{vmatrix} = (-)\left[١ - (-٩)\right] = -(١٠) = -١٠$

مرافق (٢) = $(+)\begin{vmatrix} ١ & ٤ \\ ٣ & ٢ \end{vmatrix} = (+)\left[٢ - ١٢\right] = +(-١٠) = -١٠$

مرافق (١) = $(-)\begin{vmatrix} -٣ & ٢ \\ ٢ & ١ \end{vmatrix} = (-)\left[-٣ - ٤\right] = -(-٧) = ٧$

مرافق (٤) = $(+)\begin{vmatrix} ٢ & ٢ \\ ٣ & ١ \end{vmatrix} = (+)\left[٢ - ٦\right] = +(-٤) = -٤$

مرافق (−٣) = $(-)\begin{vmatrix} ٢ & -٣ \\ ٣ & ٢ \end{vmatrix} = (-)\left[٤ - (-٩)\right] = -(١٣) = -١٣$

مرافق (٣) = $(+)\begin{vmatrix} -٣ & ٢ \\ ٤ & -٣ \end{vmatrix} = (+)\left[٩ - ٨\right] = +(١) = ١$

مرافق (٢) = $(-)\begin{vmatrix} ٢ & ٢ \\ ١ & -٣ \end{vmatrix} = (-)\left[-٦ - ٢\right] = -(-٨) = ٨$

مرافق (١) = $(+)\begin{vmatrix} ٢ & -٣ \\ ١ & ٤ \end{vmatrix} = (+)\left[٨ - (-٣)\right] = +(١١) = ١١$

$$\begin{bmatrix} ١٠- & ١٠- & ١٠ \\ ١٣- & ٤- & ٧ \\ ١١ & ٨ & ١ \end{bmatrix} = $$ ∴ مصفوفة المرافقات

(٣) تحوير مصفوفة المرافقات:

$$\begin{bmatrix} ١ & ٧ & ١٠ \\ ٨ & ٤- & ١٠- \\ ١١ & ١٣- & ١٠- \end{bmatrix}$$

(٤) معكوس المصفوفة $(أ^{-١})$ $= \frac{١}{٣٠} \begin{bmatrix} ١ & ٧ & ١٠ \\ ٨ & ٤- & ١٠- \\ ١١ & ١٣- & ١٠- \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} ٤ \\ ٥ \\ ٧ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ١ & ٧ & ١٠ \\ ٨ & ٤- & ١٠- \\ ١١ & ١٣- & ١٠- \end{bmatrix} \times \frac{١}{٣٠} = \begin{bmatrix} س \\ ص \\ ع \end{bmatrix} \quad (III)$$

$$\frac{٨٢}{٣٠} = [\,٧\times١ + ٥\times٧ + ٤\times١٠\,]\ \frac{١}{٣٠} = س$$

$$\frac{٤-}{٣٠} = [\,٧\times٨ + ٥\times٤- + ٤\times١٠-\,]\ \frac{١}{٣٠} = ص$$

$$\frac{٢٨-}{٣٠} = [\,٧\times١١ + ٥\times١٣- + ٤\times١٠-\,]\ \frac{١}{٣٠} = ع$$

$$\frac{٢٨-}{٣٠} = ع \quad ، \quad \frac{٤-}{٣٠} = ص \quad ، \quad \frac{٨٢}{٣٠} = س$$

تمارين

(١) اذكر أبعاد كل من المصفوفات الآتية:

(أ) $\begin{bmatrix} ١ & ٧ \\ ٢ & -٣ \\ ٥ & ٢ \end{bmatrix}$ ، (ب) $\begin{bmatrix} ٠ & ١ & ٣ \\ -٥ & ٢ & ٠ \end{bmatrix}$ ، (ج) $\begin{bmatrix} ٥ & ٧ \end{bmatrix}$ ، (د) $\begin{bmatrix} -٢ \end{bmatrix}$

(٢) إذا كان لديك المصفوفة أ التالية:

$$أ = \begin{bmatrix} ٢ & ٥ & ٧ \\ ٠ & ١ & ٣ \\ ٤ & ٦ & ٩ \\ ٨ & -١ & -٣ \end{bmatrix}$$

فأذكر قيم العناصر التالية : $أ_{٣٤}$ ، $أ_{١٤}$ ، $أ_{٣٢}$ ، $أ_{٢٢}$.

(٣) إفرض أن :

$$أ = \begin{bmatrix} س & -٣ \\ ٥ & ص \end{bmatrix} \quad ، \quad ب = \begin{bmatrix} ٢ & -٣ \\ ٤ & ٠ \end{bmatrix}$$

لأى قيم لـــ س ، ص ، ع تكونم أ = ب .

(٤) حل المعادلة الآتية فى أ ، ب ، ج ، د :

$$\begin{bmatrix} أ + ب & ب + ٢جـ \\ ٢جـ + د & ٢أ - د \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -١ & ٤ \\ ٨ & ٠ \end{bmatrix}$$

(٥) إذا كان لديك المصفوفات التالية:

أ = $\begin{bmatrix} ٣- & ٢ \\ ٥ & ٤ \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} ٥ & ٢ \\ ٣ & ١- \end{bmatrix}$ ، ج = $\begin{bmatrix} ١- & ٣ \\ ٤ & ٠ \end{bmatrix}$

وكانت د = -٤ ، هـ = ٢ فإثبت أن :

(أ) (د + هـ) أ = د أ + هـ أ.   (ب) أ + (ب + ج) = (أ + ب) + ج

(ج) دهـ (أ) = هـ (د أ)   (د) هـ (أ + ب) = هـ أ + هـ ب

(٦) استخدام المصفوفات الموجودة في تمرين (٥) وأحسب الآتي إذا كان ممكناً:

أ ب ، ب ج ، أ ج ، أ^{٢} ، ب^{٣} ، ج^{٣}

ثم إثبت أن : * (أ+ب)$'$ = أ$'$+ب$'$

* (أب)$'$ =ب$'$أ$'$

(٧) إفرض أن:

أ = $\begin{bmatrix} ٠ & ١- & ٢ \\ ٥ & ١ & ٣ \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} ٤- & ٢ & ٦ \\ ٢ & ٠ & ١ \end{bmatrix}$ ، جـ = $\begin{bmatrix} ٣- & ٢- & ١- \\ ٠ & ٤ & ١ \end{bmatrix}$

فأوجد ما يلي:

(أ) أ + (ب - ٣ جـ) ، (ب) ٥ أ + ٢ ب ، (جـ) ٢ أ - ب

(د) (أ + جـ) + (٢ ب) ، (هـ) أ - (ب - جـ).

(٨) إذا كانت : $\begin{bmatrix} ٧ & جـ & ٨ \\ هـ- & ٥ & ب \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} أ & ١٠ & د- \\ ١١ & ي & ٧ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢٠ & ١٠ & ١٥ \\ ٣٠- & ٠ & ١٢ \end{bmatrix}$

فأوجد قيم كل من : أ ، ب ، جـ، د ، هـ ، ى.

(٩) إفرض أن : د = ٢ ، هـ = −٣

أ = $\begin{bmatrix} ٠ & ٢ & ٣ \\ ١ & ٤ & -١ \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} -٣ & ٢ & ٢ \\ ١ & ٠ & ٥ \end{bmatrix}$ ، جـ = $\begin{bmatrix} ٠ & -٤ & -١ \\ ٣ & ٢ & ٠ \end{bmatrix}$

فأثبت أن:

(أ) أ + (ب − جـ) = (أ + ب) − جـ

(ب) (د − هـ) ب = د ب − هـ ب

(ج) هـ (أ − ب) = هـ أ − هـ ب

(د) (د هـ) أ = د (هـ أ)

(١٠) أفرض أن :

أ = $\begin{bmatrix} ٣ & ٢ & -١ \\ ٠ & ٢ & ٤ \\ ٥ & ٢ & -٣ \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} ٢ & -١ & ٣ \\ ٤ & ٣ & -٥ \\ ٠ & -٤ & -٣ \end{bmatrix}$ ، جـ = $\begin{bmatrix} -٥ & ٢ \\ ٤ & ٠ \\ ١ & -٥ \end{bmatrix}$

د = $\begin{bmatrix} ٢ & ٣ & ١ \\ -٢ & ٥ & ٤ \end{bmatrix}$ ، هـ = $\begin{bmatrix} -٣ & ٥ & ٣ \\ -٤ & ٢ & ٠ \end{bmatrix}$

فاحسب الآتى إذا كان ممكناً:

جـ أ ، أ جـ ، ب أ ، أ ب ، أ^{٢} ، هـ^{٢}، د جـ ، جـ د، هـ جـ، جـ هـ، هـ ب جـ، أ ب هـ، هـ (أ − ٢ ب).

(١١): إفرض أن I_3 مصفوفة الوحدة التى أبعادها ٣ × ٣ كما أن :

$$\text{أ} = \begin{bmatrix} -4 & 3 & 2 \\ 5 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 5 \end{bmatrix}$$

فبين أن : $\text{أ}\, I_3 = I_3\, \text{أ} = \text{أ}$

(١٢) أفرض أن :

$$\text{س} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -5 \end{bmatrix} \;،\quad \text{ص} = \begin{bmatrix} -1 & 7 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix} \;،\quad \text{ع} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} \;،$$

$$\text{ل} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \;،\quad \text{م} = \begin{bmatrix} 2 & 5 & -1 \end{bmatrix}$$

فاثبت أن :

* (س ص) × ع = س × (ص ع)

** (ص ل)$'$ = ل$'$ ص$'$

** (م ع)$'$ = ع$'$ م$'$

(١٣) أوجد معكوس (مقلوب) المصفوفات التالية إذا كان لها معكوس:

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \;،\quad \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \;،\quad \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} \;،\quad \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix} ، \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & -5 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix} ، \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} ، \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & -9 \end{bmatrix} ، \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 30 & 0 \\ 2 & 12 & 3 \end{bmatrix} ، \begin{bmatrix} 6 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

(١٤) حل النظم الخطية التالية باستخدام المصفوفات :

(أ) س − ٣ ص = ٥
٤ س + ٦ ص = ٧

(ب) س + ٢ ص = −٤
٣ س + ٥ ص = −٩

(ج) ٢س + ٥ ص = ٦
س + ٤ ص = −٣

(د) ٣ س + ٥ ص = ١٣
٢ س − ص = صفر

(هـ) ٢ س + ٣ ص − ع = ١٥
س − ص + ع = ١
٣ س − ص + ٢ ع = ٨

(و) س − ٢ ص + ع = −٢
٢ س − ص − ع = −١٠
٣ س + ص + ٢ ع = −٢

(ز) ٢س + ٢ ص − ع = ٢
س + ص + ع = ٤
س − ع = −٣

(ح) ٢ س + ٣ ص − ع = ٥
س + ٢ ص + ٣ ع = ٦
س + ص − ع = صفر

الباب السابع

التفاضل

تبين لنا من الدراسة السابقة أن الدالة هى التعبير الرياضى عن العلاقة بين التغير فى متغيرين أو أكثر، فهى بالتالى تصور جبرياً اتجاه التغير فى المتغير التابع نتيجة لتغير المتغيرات المستقلة. ونحتاج أحياناً إلى تحديد معدل التغير فى المتغير التابع نتيجة تغير معين فى المتغير أو المتغيرات المستقلة.

إن تغيير قيم المتغير المستقل فى الدالة واستنتاج قيم المتغير التابع يمكن أن يحدد لنا معدل التغير فى المتغير التابع بين قيمتين للمتغير المستقل. إلا أننا قد نكون فى حاجة إلى تحديد معدل التغير فى المتغير التابع عند قيمة معينة للمتغير المستقل، أى عند نقطة معينة على الخط البيانى الذى يمثل الدالة. فإذا وُجد لدينا دالة تبين تغير التكاليف الكلية تبعاً لتغير الوحدات المنتجة فقد نحتاج إلى أن نحدد من هذه الدالة التغير فى التكاليف الكلية نتيجة تغير بسيط فى الوحدات المنتجة يكاد يكون صفراً وهو ما يُعبر عنه فى لغة الاقتصاد بالتكاليف الحدية. كذلك إذا وُجد لدينا دالة تبين تغير الناتج الكلى تبعاً لتغير وحدات العمل المستخدمة فى الإنتاج قد نحتاج إلى أن نحدد من هذه الدالة التغير فى الناتج الكلى نتيجة تغير بسيط جداً فى الوحدات المنتجة يكاد يكون صفراً وهو ما يعبر عنه فى لغة الاقتصاد بالناتج الحدى للعمل .... إلخ. إذا أتخذ متغير قيمة عددية معينة ثم أصبح بعد تغيره قيمة عددية أخرى، فالفرق بين النتيجة الأولى والنتيجة الثانية يسمى التغير ويرمز له بالرمز Δ، مثلاً Δس (تُقرأ دلتا س) وتعبر عن التغير فى المتغير س بين قيمتين، وكذلك Δص (تقرأ دلتا ص) وتعبر عن التغير فى المتغير ص بين قيمتين. ومن الواضح أن Δ يمكن أن تكون

موجبة إذا كان التغير فى إزدياد أو سالبة إذا كان فى تناقص. والرمز $\frac{\Delta ص}{\Delta س}$ يقصد به نسبة التغير فى ص إلى التغير فى س أو معدل التغير فى الدالة. وتؤول هذه النسبة إلى نهاية محددة عندما تصبح Δس صفراً. وبذلك يكون معدل التغير فى الدالة هو القيمة التى يصل إليها متوسط التغير فى المتغير التابع عندما تصغر Δس وتصل إلى صفر.

النهايات (Limits) :

سنعرض الآن فكرة مبسطة عن النهايات وهى إحدى الأسس التى يُبنى عليها حساب التفاضل والتكامل. إن نهاية الدالة هى التعبير عن سلوكها عندما يقترب المتغير المستقل من قيمة ثابتة ولتكن (أ). والآن يهمنا معرفة كيف نجيب على سؤالين وهما:

الأول : ما هى قيمة الدالة د عندما س = أ.

الثانى : ما هو سلوك الدالة د عندما تكون س قريبة من أ.

مثال (١) :

إذا كان لدينا الدالة التالية:

$$د(س) = \frac{س^{٢} + ٢س - ٣}{س - ١}$$

لدراسة سلوك الدالة عند النقطة س =١ ثم بالقرب من س = ١ ، نبدأ أولاً بالجزء الأول.

$$د(١) = \frac{(١)^{٢} + ٢(١) - ٣}{١ - ١} = \frac{صفر}{صفر} \quad \text{(كمية غير محددة)}$$

أما لدراسة سلوك الدالة بالقرب من س = ١ فإننا نقوم بتتبع قيم س بحيث تقترب من ١ من ناحية اليمين وكذلك من ناحية اليسار ونرى أثر ذلك على الدالة د(س) نفسها. والجدول التالي يوضح ذلك:

س	$د(س) = \frac{س^{٢} + ٢س - ٣}{س - ١}$	القيمة
٠,٨	$د(٠,٨) = \frac{(٠,٨)^{٢} + ٢(٠,٨) - ٣}{٠,٨ - ١}$	٣,٨
٠,٩	$د(٠,٩) = \frac{(٠,٩)^{٢} + ٢(٠,٩) - ٣}{٠,٩ - ١}$	٣,٩
٠,٩٥	$د(٠,٩٥) = \frac{(٠,٩٥)^{٢} + ٢(٠,٩٥) - ٣}{٠,٩٥ - ١}$	٣,٩٥
٠,٩٩	$د(٠,٩٩) = \frac{(٠,٩٩)^{٢} + ٢(٠,٩٩) - ٣}{٠,٩٩ - ١}$	٣,٩٩
١	د (١)	....
١,٠٠١	$د(١,٠٠١) = \frac{(١,٠٠١)^{٢} + ٢(١,٠٠١) - ٣}{١,٠٠١ - ١}$	٤,٠٠١
١,٠١	$د(١,٠١) = \frac{(١,٠١)^{٢} + ٢(١,٠١) - ٣}{١,٠١ - ١}$	٤,٠١
١,٠٥	$د(١,٠٥) = \frac{(١,٠٥)^{٢} + ٢(١,٠٥) - ٣}{١,٠٥ - ١}$	٤,٠٥
١,١	$د(١,١) = \frac{(١,١)^{٢} - ٢(١,١) - ٣}{١,١ - ١}$	٤,١

ويمكن تلخيص النتائج السابقة فى الجدول التالى:

س	٠,٨	٠,٩	٠,٩٥	٠,٩٩	١	١,٠٠١	١,٠١	١,٠٥	١,١
د(س)	٣,٨	٣,٩	٣,٩٥	٣,٩٩	–	٤,٠٠١	٤,٠١	٤,٠٥	٤,١

س تقترب من (١) من ناحية اليمين ← ١ → س تقترب من (١) من ناحية اليسار

نلاحظ أن قيمة الدالة تصبح أقرب فأقرب من العدد (٤) عندما تصبح س أقرب فأقرب من القيمة (١)، ويسمى العدد (٤) فى هذه الحالة نهاية الدالة

د(س) = $\frac{س^{٢} + ٣س - ٣}{س - ١}$ عندما تؤول س إلى (١) ويُعبر عن ذلك كمايلى:

$$\lim_{س \to ١} \left(\frac{س^{٢} + ٢س - ٣}{س - ١} \right) = ٤$$

وتقترب س فى هذه الحالة من القيمة ١ (ولكنها تختلف عن العدد ١). سوف لا نهتم فى هذه المرحلة بدراسة البراهين المتعلقة بالنهايات ولكننا نقرب فكرة نهاية الدالة إلى ذهن الطالب فقط.

تعريف نهاية الدالة:

إذا كانت الدالة د (س) = ب فيمكن تفسير العبارة :

$\lim_{س \to أ} د(س) = ب$ كما يلى: كلما اقتربت س من أ (على أن تبقى مختلفة عن أ) كلما اقتربت الدالة د (س) من ب .

على سبيل المثال فى حالة الدالة د (س) = $\frac{س^{٢} + ٣س - ٣}{س - ١}$ كانت د (س) تؤول إلى ٤ (ب) عندما تؤول س إلى ١ (أ).

خواص النهايات (Properties of Limits) :

١- نهاية الدالة الثابتة د(س) = ث تساوى قيمة الثابت ث. أى أن :

$$\lim_{س \to أ} (ث) = ث$$

مثال (٢) :

$$\lim_{س \to ٣} (٥) = ٥ \quad ، \quad \lim_{س \to ٠} (٥) = ٥ \quad ، \quad \lim_{س \to ١٠٠} (٥) = ٥$$

٢- $\lim_{س \to أ} (س) = أ$

مثال (٣) :

$$\lim_{س \to ٠} (س) = ٠ \quad ، \quad \lim_{س \to -٢} (س) = -٢ \quad ، \quad \lim_{س \to ١٠٠} (س) = ١٠٠$$

٣- نهاية مجموع دالتين تساوى مجموع نهايتى الدالتين، ونهاية الفرق بين دالتين تساوى الفرق بين نهايتى الدالتين، ونهاية حاصل ضرب دالتين تساوى حاصل ضرب نهايتى الدالتين. أى أن:

$$\lim_{س \to أ} [د_{١}(س) + د_{٢}(س)] = \lim_{س \to أ} د_{١}(س) + \lim_{س \to أ} د_{٢}(س) .$$

$$\lim_{س \to أ} [د_{١}(س) - د_{٢}(س)] = \lim_{س \to أ} د_{١}(س) - \lim_{س \to أ} د_{٢}(س) .$$

$$\underset{\text{س}\to\text{أ}}{\text{نهـا}}\left[\text{د}_{1}(\text{س})\times\text{د}_{2}(\text{س})\right]=\underset{\text{س}\to\text{أ}}{\text{نهـا}}\,\text{د}_{1}(\text{س})\times\underset{\text{س}\to\text{أ}}{\text{نهـا}}\,\text{د}_{2}(\text{س})\ .$$

مثال (٤) :

$$\underset{\text{س}\to\text{٤}}{\text{نهـا}}\,[\text{س}+\text{٥}]=\underset{\text{س}\to\text{٤}}{\text{نهـا}}\,\text{س}+\underset{\text{س}\to\text{٤}}{\text{نهـا}}\,\text{٥}=\text{٤}+\text{٥}=\text{٩}\ .$$

$$\underset{\text{س}\to\text{٤}}{\text{نهـا}}\,[\text{س}-\text{٥}]=\underset{\text{س}\to\text{٤}}{\text{نهـا}}\,\text{س}-\underset{\text{س}\to\text{٤}}{\text{نهـا}}\,\text{٥}=\text{٤}-\text{٥}=-\text{١}\ .$$

$$\underset{\text{س}\to\text{٤}}{\text{نهـا}}\,\text{س}[\text{س}+\text{٥}]=\underset{\text{س}\to\text{٤}}{\text{نهـا}}\,\text{س}\times\underset{\text{س}\to\text{٤}}{\text{نهـا}}(\text{س}+\text{٥})=\text{٤}\times\text{٩}=\text{٣٦}$$

$$\underset{\text{س}\to\text{٢}}{\text{نهـا}}\,\text{س}^{\text{٢}}=\underset{\text{س}\to\text{٢}}{\text{نهـا}}\,\text{س}\times\underset{\text{س}\to\text{٢}}{\text{نهـا}}\,\text{س}=\text{٢}\times\text{٢}=\text{٤}\ .$$

$$\underset{\text{س}\to\text{٣}}{\text{نهـا}}\,\text{٧س}=\underset{\text{س}\to\text{٣}}{\text{نهـا}}\,\text{٧}\times\underset{\text{س}\to\text{٣}}{\text{نهـا}}\,\text{س}=\text{٧}\times\text{٣}=\text{٢١}\ .$$

ملاحظة:

إذا كان ث أى عدد ثابت فيمكن باستخدام الخاصيتين ١ ، ٣ أن نقول :

$$\underset{\text{س}\to\text{أ}}{\text{نهـا}}\,\text{ث}\,\text{د}(\text{س})\times\text{ث}\underset{\text{س}\to\text{أ}}{\text{نهـا}}\,\text{د}(\text{س})\ .$$

مثال (٥) :

$$\underset{\text{س}\to\text{٣}}{\text{نهـا}}\left(\text{٢س}^{\text{٢}}-\text{٤س}+\text{٥}\right)=\underset{\text{س}\to\text{٣}}{\text{نهـا}}\,\text{٢س}^{\text{٢}}-\underset{\text{س}\to\text{٣}}{\text{نهـا}}\,\text{٤س}+\underset{\text{س}\to\text{٣}}{\text{نهـا}}\,\text{٥}$$

$$=\text{٢}\underset{\text{س}\to\text{٣}}{\text{نهـا}}\,\text{س}^{\text{٢}}-\text{٤}\underset{\text{س}\to\text{٣}}{\text{نهـا}}\,\text{س}+\underset{\text{س}\to\text{٣}}{\text{نهـا}}\,\text{٥}$$

$$= ٢ (\underset{س \to ٣}{نهـا} س \times \underset{س \to ٣}{نهـا} س) - ٤ \underset{س \to ٣}{نهـا} س + \underset{س \to ٣}{نهـا} ٥$$

$$= ٢ (٣ \times ٣) - ٤ (٣) + ٥ = ١١$$

٥- نهاية النسبة بين دالتين تساوى النسبة بين نهايتى الدالتين بشرط أن نهاية المقام لا تساوى صفراً.

مثال (٦) :

$$\underset{س \to ٣}{نهـا} \frac{س^٢ - ٩}{س - ٣}$$

لا يمكن إيجاد نهاية هذه الدالة مباشرة باستخدام الخاصية السابقة لأن:

$$\underset{س \to ٣}{نهـا} (س - ٣) = صفر$$

ولكن بإمكاننا وضع الدالة على الصورة التالية:

$$\underset{س \to ٣}{نهـا} \frac{س^٢ - ٩}{س - ٣} = \underset{س \to ٣}{نهـا} \frac{(س - ٣)(س + ٣)}{(س - ٣)}$$

$$= \underset{س \to ٣}{نهـا} (س + ٣) = ٦$$

معدل التغير (Rate of Change) :

إذا كان المقدار ص دالة للمقدار س، وإذا تغيرت قيمة ص من $ص_١$ إلى $ص_٢$ بتغير قيمة س من $س_١$ إلى $س_٢$، فإن متوسط تغير ص بالنسبة إلى س هو :

$$\frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$$

وإذا كانت س ، ص مرتبطين حسب المعادلة ص = د (س) فإن:

$ص_1 = د(س_1)$ ، $ص_2 = د(س_2)$.

وبالتالى يمكن التعبير عن المعادلة السابقة بطريقة أخرى كمايلى:

متوسط معدل التغير بين $س_1$، $س_2$ هو :

$$\frac{ص_2 - ص_1}{س_2 - س_1} = \frac{د(س_2) - د(س_1)}{س_2 - س_1} = \frac{\Delta ص}{\Delta س} .$$

أى أن متوسط معدل التغير فى الدالة د (س) خلال الفترة المغلقة [$س_1$ ، $س_2$] يساوى الفرق بين قيمة الدالة د(س) عند نهاية الفترة وبدايتها مقسوماً على الفرق بين بداية الفترة ونهايتها.

مثال (٧) :

وجدت شركة إنتاج سائل ما أن التكلفة ك (بالجنيه) اللازمة لإنتاج كمية س من السائل (باللترات) هو: ك = د(س) = $س^2$ −٢س + ٥، فتكون تكلفة إنتاج ٥ لترات هى د(٥) = ٢٠ جنيه، وتكلفة إنتاج ١٠ لترات هى د(١٠) = ٨٥ جنيه . أى أن زيادة الإنتاج من خمسة لترات إلى عشرة لترات سببت متوسط زيادة فى التكلفة كمايلى:

متوسط الزيادة فى التكلفة = $\frac{د(١٠) - د(٥)}{١٠ - ٥}$

$$= \frac{٨٥ - ٢٠}{٥} = ١٣ \text{ جنيه / لتر}$$

المشتقة (The Derivative) :

إذا اعتبرنا الدالة ص دالة فى المتغير المستقل س ، أى أن ص = د (س) معرفة خلال الفترة ب ≥ س ≥ أ . فإذا فرضنا النقطة ج تقع داخل الفترة [أ ، ب] بمعنى أن ج ∈ [أ ، ب] فإن تفاضل الدالة د (س) بالنسبة للمتغير س عند النقطة ج يُعرف بأنه نهاية متوسط معدل التغير للدالة د (س) بالنسبة للمتغير س عندما تؤول Δس إلى الصفر (وذلك فى حالة وجود نهاية للدالة د(س) عند النقطة ج). ويُرمز لتفاضل الدالة ص بالنسبة للمتغير س بالرمز $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ وتُقرأ تفاضل الدالة ص بالنسبة إلى المتغير س ، وأحياناً يُرمز للتفاضل بالرمز ص/ أو د/(س)، ومن التعريف السابق نجد أن :

$$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \lim_{\Delta\text{س} \to 0} \frac{\Delta\text{ص}}{\Delta\text{س}} = \lim_{\Delta\text{س} \to 0} \frac{\text{د}(\text{س} + \Delta\text{س}) - \text{د}(\text{س})}{\Delta\text{س}}$$

وفى حالة عدم وجود نهاية للدالة ص عند نقطة معينة ولتكن س = هـ فإنه يقال أن الدالة د(س) = ص ليس لها تفاضل عند النقطة س = هـ. وأحياناً يسمى تفاضل الدالة ص أى $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ بالمشتقة derivative أو المشتقة الأولى first derivative بالنسبة للمتغير س. أى أنه يمكن اعتبار أن المشتقة الأولى هى معدل التغير اللحظى أو الفورى للدالة ص. والمقصود بالتغير اللحظى هو التغير فى الدالة د (س) الناتج عن التغير الطفيف (أى أقل تغير ممكن أن يحدث فى س) فى المتغير المستقل س. ويطلق على المشتقة الأولى بمعدل التغير اللحظى فقط للتمييز بينها وبين متوسط معدل التغير.

لحساب التفاضل (المشتقة الأولى) عند نقطة معينة باستخدام أسلوب النهايات نتبع الخطوات التالية:

١- نوجد قيمة الدالة ص = د (س) عند النقطة (س + Δس).

٢- نوجد المقدار Δص حيث : Δ ص = د (س + Δس) - د (س)

٣- نوجد متوسط معدل التغير (م) حيث : م = $\frac{\Delta ص}{\Delta س}$

٤- نوجد نهاية متوسط معدل التغير، أى نوجد: $\lim\limits_{\Delta س \to ٠}$ م

٥- نحسب $\lim\limits_{\Delta س \to ٠}$ م عند النقطة المطلوبة

مثال (٨) :

أوجد تفاضل الدالة ص باستخدام أسلوب النهايات حيث:

ص = د (س) = س^{٢} + ١٠ س + ٥

عند النقطة س = ١ ، ثم عقب على الناتج.

الحـــل

(١) نوجد قيمة د (س + Δ س) كالآتى:

د (س + Δ س) = (س + Δ س)^{٢} + ١٠ (س + Δ س) + ٥

= س^{٢} +٢س(Δس) + (Δ س)^{٢} + ١٠س+ ١٠ (Δس) + ٥

= س^{٢} + (٢س + ١٠) Δ س + ١٠س + (Δ س)^{٢} + ٥

(٢) نوجد Δ ص = د (س + Δ س) - د (س)

= س^{٢} + (٢س + ١٠) Δ س + ١٠س + (Δ س)^{٢} + ٥ - س^{٢} -
١٠س - ٥ = (٢س + ١٠) Δ س + (Δ س)^{٢}

(٣) متوسط معدل التغير (م) = $\frac{\Delta ص}{\Delta س}$

$$= \frac{(٢س + ١٠)\Delta س + (\Delta س)^{٢}}{\Delta س}$$

= (٢س + ١٠) + (Δ س)

(٤) نهاية متوسط معدل التغير ($\lim\limits_{\Delta س \to ٠}$ م) :

$$\frac{دص}{دس} = \lim_{\Delta س \to ٠} م = \lim_{\Delta س \to ٠} (٢س - ١٠) + (\Delta س) = ٢ س + ١٠$$

(٥) عندما س = ١ فإن :

$$\frac{دص}{دس} = ٢ (١) + ١٠ = ١٢$$

ويعنى الناتج ١٢ أن حدوث أى غير طفيف فى المتغير س عند س = ١ سوف يؤدى إلى تغير الدالة ص بمقار ١٢ وحدة.

مثال (٩) :

أوجد تفاضل الدالة ص عند النقطة س = ٥ حيث :

ص = د(س) = ٤ س^{٢} - ٥ س + ٧

باستخدام أسلوب النهايات.

الحـــل

(١) د (س + Δس) = ٤ (س + Δس)^{٢} − ٥ (س + Δس) + ٧

= ٤ [س^{٢} + ٢س(Δس) + (Δس)^{٢}] − ٥س − ٥ (Δس) + ٧

= ٤س^{٢} + ٨س(Δس) + ٤ (Δس)^{٢} − ٥س − ٥(Δس) + ٧

= ٤ س^{٢} + (٨س − ٥) Δس + ٤ (Δس)^{٢} − ٥س + ٧

(٢) Δص = د (س + Δس) − د (س)

= ٤س^{٢} + (٨س − ٥) Δس + ٤ (Δس)^{٢} − ٥س + ٧ − ٤س^{٢} + ٥س − ٧

= (٨س − ٥) Δس + ٤ (Δس)^{٢}

(٣) متوسط معدل التغير (م) = $\dfrac{\Delta\text{ص}}{\Delta\text{س}}$

= $\dfrac{(\text{٨س} - ٥)\Delta\text{س} + ٤(\Delta\text{س})^{٢}}{\Delta\text{س}}$

= (٨س − ٥) + ٤ (Δس)

(٤) نهاية متوسط معدل التغير ($\lim\limits_{\Delta\text{س} \to ٠}$ م) :

$\dfrac{\text{دص}}{\text{دس}} = \lim\limits_{\Delta\text{س} \to ٠} \text{م} = \lim\limits_{\Delta\text{س} \to ٠} (\text{٨س} - ٥) + ٤(\Delta\text{س})$ = = ٨س − ٥

(٥) عندما س = ٥ فإن :

$\dfrac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = ٨ (٥) − ٥ = ٣٥

أى أنه عند حدوث تغير طفيف في المتغير س عند س = ٥ سوف يؤدى إلى تغير الدالة ص بمقدار ٣٥ وحدة.

قواعد التفاضل:

لإجراء عملية التفاضل أى لايجاد المعامل التفاضلى الأول أو المشتقة الأولى $\left(\frac{ءص}{ءس}\right)$ وأحياناً نرمز لها بـ ص/نلاحظ أن أتباع الخطوات كما فى الأمثلة السابقة يكون عملاً مجهداً وطويلاً، لذلك وضعت قواعد تساعدنا فى تسهيل العمل. هذه القواعد مبنية على النتائج التى تترتب على اتباع الخطوات السابقة نفسها:

(١) تفاضل الكمية الثابتة يساوى صفر:

أى أنه إذا كانت ص = مقدار ثابت فإن: $\frac{ءص}{ءس}$ = صفر وهو أمر منطقى حيث أن التفاضل يُعنى إيجاد معدل التغير فى الدالة، ووجود ثابت فى الدالة لا يؤثر على التغير فى ص المقابل لتغير معين فى س. وبشكل آخر يكون تغير ص فى هذه الحالة = صفراً مهما تغيرت س.

فمثلاً :

ص = ٣ : $\frac{ءص}{ءس}$ = صفر ، ص = $\frac{١}{٢}$: $\frac{ءص}{ءس}$ = صفر

ص = −٢ : $\frac{ءص}{ءس}$ = صفر ، ص = ٠,٢ : $\frac{ءص}{ءس}$ = صفر

(٢) لإيجاد المعامل التفاضلى لمتغير مرفوع إلى قوة معينة تضرب المتغير فى قوته وننقص قوته واحد.

فإذا كانت $\text{ص} = \text{س}^{\text{ن}}$ فإن $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{ن} \times \text{س}^{\text{ن}-١}$

سواء كانت ن عدد موجب أو سالب وسواء كانت عدداً صحيحاً أو كسراً.

فمثلاً : $\text{ص} = \text{س}^{٤}$ فإن : $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٤\text{س}^{٤-١} = ٤\ \text{س}^{٣}$

$\text{ص} = \text{س}^{-٣}$ فإن : $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = -٣\text{س}^{-٣-١} = -٣\ \text{س}^{-٤}$

$\text{ص} = \sqrt{\text{س}} \leftarrow \text{ص} = \text{س}^{\frac{١}{٢}}$ فإن : $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{١}{٢}\text{س}^{\frac{١}{٢}-١} = \frac{١}{٢}\text{س}^{-\frac{١}{٢}}$

$\text{ص} = \frac{١}{\text{س}^{٥}} \leftarrow \text{ص} = \text{س}^{-٥}$ فإن: $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = -٥\ \text{س}^{-٥-١} = -٥\ \text{س}^{-٦}$

$\text{ص} = \sqrt[٣]{\text{س}} \leftarrow \text{ص} = \text{س}^{\frac{١}{٣}}$: $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{١}{٣}\text{س}^{\frac{١}{٣}-١} = \frac{١}{٣}\text{س}^{-\frac{٢}{٣}}$

(*) إذا كانت ص = س فإن $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ١$

حيث أن تفاضل متغير بالنسبة لنفسه يساوى الواحد الصحيح.

فمثلاً : $\text{ص} = \text{س}$ فإن : $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ١$

$\text{ص} = ٥\text{س}$ فإن : $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٥$

$\text{ص} = -٢\text{س}$ فإن : $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = -٢$

(**) إذا كانت ص = أ س$^{\text{ن}}$ فإن : $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = أ × ن س$^{\text{ن}-١}$

فمثلاً : ص = ٥س^{٢} فإن : $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ٢ \times ٥\,\text{س}^{٢-١} = ١٠\text{س}$

$\text{ص} = \frac{٣}{\text{س}^{٣}} = ٣\text{س}^{-٣}$ فإن : $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = -٣ \times ٣\text{س}^{-٣-١} = -٩\text{س}^{-٤}$

$\text{ص} = \frac{١٠}{\sqrt{\text{س}}} \leftarrow \text{ص} = \frac{١٠}{(\text{س})^{\frac{١}{٢}}} \leftarrow \text{ص} = ١٠\text{س}^{-\frac{١}{٢}}$

فإن $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ١٠ \times -\frac{١}{٢}\text{س}^{-\frac{١}{٢}-١} = -٥\text{س}^{-\frac{٣}{٢}}$

$\text{ص} = \frac{٥}{\text{س}} \leftarrow \text{ص} = ٥\text{س}^{-١} \leftarrow \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ٥ \times -١\text{س}^{-١-١} = ٥\text{س}^{-٢}$

$\text{ص} = ٣\sqrt[٣]{\text{س}} \leftarrow \text{ص} = ٣\text{س}^{\frac{١}{٣}}$

$\therefore \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ٣ \times \frac{١}{٣}\text{س}^{\frac{١}{٣}-١} = \text{س}^{-\frac{٢}{٣}}$

(٣) إذا كانت ص عبارة عن المجموع الجبرى لعدد محدود من الدوال القابلة للاشتقاق فإن المشتقة الأولى تكون عبارة عن المجموع الجبرى لمشتقات هذه الدوال.

فإذا كانت ص = ص$_{١}$ + ص$_{٢}$ + ... + ص$_{\text{ن}}$

فإن $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{دص}_{١}}{\text{دس}} + \frac{\text{دص}_{٢}}{\text{دس}} + \cdots\cdots + \frac{\text{دص}_{\text{ن}}}{\text{دس}}$

مثال (١٠) :

أوجد المشتقة الأولى للدالة:

$$ص = \frac{1}{8} س^{3} + 4س^{2} + س + 9$$

الحل

$$\frac{دص}{دس} = \frac{3}{8} س^{2} + 8س + 1$$

مثال (١١) :

أوجد المعامل التفاضلي الأول للدوال التالية:

(أ) $ص = 5س^{4} - 3س^{2} + 5س - 13$

(ب) $ص = \sqrt{س} + \frac{5}{س^{2}}$

(ج) $ص = 4ع^{3} - 5ع - 12$

الحل

(أ) $ص = 5س^{4} - 3س^{2} + 5س - 13$

$\therefore \frac{دص}{دس} = 20س^{3} - 6س + 5$

(ب) $ص = \sqrt{س} + \frac{5}{س^{2}} = س^{\frac{1}{2}} + 5س^{-2}$

$\therefore \frac{دص}{دس} = \frac{1}{2} س^{-\frac{1}{2}} - 10س^{-3}$

(ج) ص = ٤ ع^{٣} − ٥ع − ١٢

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = ١٢ ع^{٢} − ٥

(٤) تفاضل حاصل ضرب دالتين = الأولى × تفاضل الثانية + الثانية × تفاضل الأولى

فمثلاً إذا كانت ص = (س^{٣} − ٥س^{٢}) (٣س +١٠)

فإن $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = (س^{٣} − ٥س^{٢}) (٣) + (٣س + ١٠) (٣س^{٢} − ١٠س)

مثال (١٢) :

أوجد المعامل التفاضلى الأول للدوال التالية:

(أ) ص = (٤ س^{٣} − ٢س^{٢}) (٥س^{٣} − ٣س^{٢} + ٧)

(ب) ص = س^{٤} (س^{٣} + ٦)

(ج) ص = $\sqrt{\text{ع}}$ (ع^{٣} − ٣ع + ٥)

الحـــل

(أ) ص = (٤ س^{٣} − ٢س^{٢}) (٥س^{٣} −٣س^{٢} + ٧)

∴ $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = (٤س^{٣} −٢س^{٢}) (١٥س^{٢} − ٦س) + (٥س^{٣} −٣س^{٢}+٧) (١٢س^{٢}−٤س)

(ب) ص = س^{٤} (س^{٣} + ٦)

∴ $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = س^{٤} (٣س^{٢}) + (س^{٣} +٦) (٤س^{٣})

(ج) ص = $ع^{\frac{1}{2}}$ ($ع^{3}$ − ٣ع + ٥)

$$\frac{ءص}{ءس} = ع^{\frac{1}{2}}\,(3ع^{2}-3) + (ع^{3}-3ع+5)\left(\frac{1}{2}ع^{-\frac{1}{2}}\right)$$

(٥) تفاضل خارج قسمة دالتنين = $\dfrac{\text{المقام × تفاضل البسط − البسط × تفاضل المقام}}{(\text{المقام})^{2}}$

فمثلاً: ص = $\dfrac{س^{3} + 2س^{2}}{3س + 4}$

فإن $\dfrac{ءص}{ءس} = \dfrac{(3س+4)(3س^{2}+4س)-(س^{3}+2س^{2})(3)}{(3س+4)^{2}}$

كذلك إذا كانت ص = $\dfrac{4س^{2}-2س}{12س^{3}-5}$

فإن $\dfrac{ءص}{ءس} = \dfrac{(12س^{3}-5)(8س-2)-(4س^{2}-2س)(36س^{2})}{(12س^{3}-5)^{2}}$

(٦) إذا كانت ص = $[ر(س)]^{ن}$

فإن $\dfrac{ءص}{ءس}$ = ن $[ر(س)]^{ن-1}$ × تفاضل د (س)

أى أن تفاضل القوس المرفوع لاس = تفاضل القوس × تفاضل ما بداخل القوس

فمثلاً إذا كانت ص = $(س^{3} + 2س)^{4}$

فإن $\dfrac{ءص}{ءس}$ = ٤ $(س^{3} + 2س)^{3}$ × ($3س^{2}$ + ٢)

كذلك إذا كانت ص = $(٢س^٢ + ٤س)^{-٣}$

فإن $\frac{ءص}{ءس} = -٣\ (٢س^٢ + ٤س)^{-٤} \times (٤س + ٤)$

مثال (١٣) :

أوجد المعامل التفاضلى الأول للدوال التالية:

(أ) ص = $(٣س^٣ + ٥س)^٣$ (د) ص = $\frac{١}{\sqrt{٣س^٣ + ٥س^٢}}$

(ب) ص = $\frac{١}{(٣س^٣ + ٥س)^٣}$ (هـ) ص= $\sqrt[٣]{٣س^٣ + ٥س}$

(ج) ص = $\sqrt{(٣س^٣ + ٥)}$

الحــــــل

(أ) ص = $(٣س^٣ + ٥س)^٣$

$\therefore \frac{ءص}{ءس} = ٣\ (٣س^٣ + ٥س)^٢ \times (٩س^٢ + ٥)$

(ب) ص = $\frac{١}{(٣س^٣ + ٥س)^٣} = (٣س^٣ + ٥س)^{-٣}$

$\therefore \frac{ءص}{ءس} = -٣\ (٣س^٣ + ٥س)^{-٤} \times (٩س^٢ + ٥)$

(ج) ص = $\sqrt{(٣س^٣ + ٥)} = (٣س^٣ + ٥)^{\frac{١}{٢}}$

$\therefore \frac{ءص}{ءس} = \frac{١}{٢}\ (٣س^٣ + ٥)^{-\frac{١}{٢}} \times (٩س^٢)$

(د) ص = $\frac{1}{\sqrt{٣س^٣ + ٥س^٢}} = \frac{1}{(٣س^٣ + ٥س^٢)^{\frac{1}{2}}} = (٣س^٣ + ٥س^٢)^{-\frac{1}{2}}$

$\therefore \frac{ءص}{ءس} = -\frac{1}{2}(٣س^٣+٥س^٢)^{-\frac{3}{2}} \times (٩س^٢ + ١٠س)$

(هـ) ص = $\sqrt[3]{٣س^٣ + ٥س} = (٣س^٣ + ٥س)^{\frac{1}{3}}$

$\therefore \frac{ءص}{ءس} = \frac{1}{3}(٣س^٣ + ٥س)^{-\frac{2}{3}} \times (٩س^٢ + ٥)$

(٧) إذا كانت ص = هـ$^{د(س)}$ فإن :

$\frac{ءص}{ءس}$ = **تفاضل د (س) × هـ$^{د(س)}$ = تفاضل الأس × الدالة نفسها (هـ)$^{د(س)}$**

فإذا كانت ص = $هـ^{٤س^٣+٢}$ فإن : $\frac{ءص}{ءس} = ١٢س^٢ \times هـ^{٤س^٣+٢}$

وكذلك إذا كانت ص = $هـ^{٢س^٣+٣س^٢+٤س}$

فإن : $\frac{ءص}{ءس} = (٦س^٢ + ٦س + ٤) \times هـ^{٢س^٣+٣س^٢+٤س}$

كما أنه إذا كانت ص = $هـ^{س}$ فإن : $\frac{ءص}{ءس} = ١ \times هـ^{س} = هـ^{س}$

(٨) إذا كانت ص = لو$_{هـ}$ د(س) فإن :

$$\frac{ءص}{ءس} = \frac{\text{تفاضل د(س)}}{\text{د(س)}}$$

فمثلاً إذا كانت ص = لو$_{هـ}$ س^٣ فإن : $\frac{ءص}{ءس} = \frac{٣س^٢}{س^٣} = \frac{٣}{س}$.

مثال (١٤) :

أوجد $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ للدوال التالية :

(أ) $\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}(\text{٥س}^{٢} + \text{١٠س} - ٥)$ (ج) ص = لو س

(ب) $\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}\sqrt{\text{٢س}^{٣} - \text{٥س}}$

الحـــــل

(أ) $\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}(\text{٥س}^{٢} + \text{١٠س} - ٥)$

$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{١٠س} + ١٠}{\text{٥س}^{٢} + \text{١٠س} - ٥}$$

(ب) $\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}\sqrt{\text{٢س}^{٣} - \text{٥س}} = \text{لو}_{\text{هـ}}(\text{٢س}^{٣} - \text{٥س})^{\frac{١}{٢}}$

$$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\frac{١}{٢}(\text{٢س}^{٣} - \text{٥س})^{-\frac{١}{٢}} \times (\text{٦س}^{٢} - ٥)}{(\text{٢س}^{٣} - \text{٥س})^{\frac{١}{٢}}} = \frac{(\text{٦س}^{٢} - ٥)}{٢(\text{٢س}^{٣} - \text{٥س})}$$

(ج) ص = لو س

$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{١}{\text{س}}$$

(٩) تفاضل دالة الدالة:

بمعنى أنه إذا كانت ص دالة فى المتغير ع وكانت ع دالة فى المتغير س فإن معدل تغير ص بالنسبة إلى س يساوى معدل تغير ص بالنسبة إلى ع مضروباً فى معدل تغير ع بالنسبة إلى س.

فإذا كانت ص = د (ع) ، وكانت ع = د(س) فإن :

$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{ءص}}{\text{ءع}} \times \frac{\text{ءع}}{\text{ءس}}$$

فإذا كانت ص = ٢ع وكانت ع = ٣س فإنه لإيجاد

$\frac{ءص}{ءع}$ نتبع الخطوات التالية :

(١) $\frac{ءص}{ءع}$ = ٢ (من المعادلة الأولى)

(٢) $\frac{ءع}{ءس}$ = ٣ (من المعادلة الثانية)

(٣) $\frac{ءص}{ءس}$ = $\frac{ءص}{ءع}$ × $\frac{ءع}{ءس}$ = ٢ × ٣ = ٦

مثال (١٥):

أوجد $\frac{ءص}{ءس}$ للدوال الآتية:

(أ) ص = $ع^{٣}$ ، ع = $س^{٢}$ + ٢س

(ب) ص = $ع^{٢}$ + ٣ع – ٥ ، ع = ٤س + ٦

الحـــل

(أ) ص = $ع^{٣}$ ، ع = $س^{٢}$ + ٢ س

$\frac{ءص}{ءع}$ = $٣ع^{٢}$ ، $\frac{ءع}{ءس}$ = ٢س + ٢

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = $\frac{ءص}{ءع}$ × $\frac{ءع}{ءس}$ = ٣ $ع^{٢}$ (٢س +٢)

وبالتعويض عن ع = $س^{٢}$ + ٢س

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = ٣ $(س^{٢} + ٢س)^{٢}$ (٢س + ٢)

(ب) $\text{ص} = \text{ع}^{٢} + ٣\text{ع} - ٥$ ، $\text{ع} = ٤\text{س} + ٦$

$$\frac{\text{دص}}{\text{دع}} = ٢\text{ع} + ٣ \qquad \frac{\text{دع}}{\text{دس}} = ٤$$

$$\therefore \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{دص}}{\text{دع}} \times \frac{\text{دع}}{\text{دس}}$$

$$\therefore \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = (٢\text{ع} + ٣) \times ٤ = ٨\text{ع} + ١٢$$

وبالتعويض عن $\text{ع} = ٤\text{س} + ٦$

$$\therefore \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ٨(٤\text{س} + ٦) + ١٢$$

$$= ٣٢\text{س} + ٤٨ + ١٢ = ٣٢\text{س} + ٦٠$$

(١٠) تفاضل مقلوب الدالة:

إذا كانت ص = د(س) وأردنا إيجاد $\frac{\text{دس}}{\text{دص}}$ ، فإنه يتم إيجاد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ أولاً ثم نقلب هذا المعامل فتكون النتيجة هي $\frac{\text{دس}}{\text{دص}}$ ، فمثلاً إذا كانت $\text{ص} = ٤\text{س}^{٥} + ١٠$ فإنه يمكن الحصول على $\frac{\text{دس}}{\text{دص}}$ كالتالي:

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ٢٠\text{س}^{٤} \quad \leftarrow \quad \frac{\text{دس}}{\text{دص}} = \frac{١}{٢٠\text{س}^{٤}}$$

بحيث أن : $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} \times \frac{\text{دس}}{\text{دص}} = ١$

مثال (١٦) :

أوجد $\frac{\text{دس}}{\text{دص}}$ للدالة $\text{ص} = ٣\text{س}^{٣} - ٥\text{س} + ١٠$

الحـــــل

$$\frac{ءص}{ءس} = ٩ س^{٢} - ٥$$

$$\therefore \frac{ءس}{ءص} = \frac{١}{(٩س^{٢} - ٥)}$$

(١١) تفاضل الدالة الضمنية:

إذا كانت العلاقة بين المتغيرين س ، ص على الصورة ص = د(س)، فيمكن تسمية هذه العلاقة بالدالة الصريحة Explicit Function لأنها توضح قيمة ص بمعلومية س، ومثال ذلك ص = ٣ س^{٢} . أما إذا كانت العلاقة بين المتغيرين على شكل معادلة صفرية على الصورة د(س ، ص) = صفر، وكان من الممكن الحصول على قيمة ص كدالة فى س فإنه يقال بأن ص دالة ضمنية Emplicit Function فى س، ومثال ذلك ص س^{٢} = ٢٥ حيث أن قيمة ص تتحدد ضمنياً بمعلومية س.

فمثلاً إذا كان لدينا الدالة الضمنية الآتية: ٢ص – ٣ س + ٤ = ٠ ، وكانت ص دالة ضمنية فى س ولها مشتقة أولى بالنسبة إلى س فإنه يمكن اشتقاقها باتباع أحد الأسلوبين التاليين:

١– حل المعادلة الصفرية والحصول على دالة صريحة على الصورة ص = د(س)، ثم مفاضلة الدالة الصريحة الناتجة للحصول على $\frac{ءص}{ءس}$ كالآتى:

(*) ص = ١,٥ س – ٢

(**) $\frac{ءص}{ءس}$ = ١,٥

٢- مفاضلة طرفى المعادلة الصفرية المعطاه بالنسبة إلى س مع الأخذ فى الاعتبار بأن ص دالة فى س كالتالى:

تفاضل (٢ص) هو $٢ \times \frac{ءص}{ءس}$ ، وتفاضل (-٣س) هو -٣، وتفاضل ٤ هو الصفر. كما أن تفاضل الطرف الأيسر للمعادلة يساوى صفراً، وبذلك يكون :

$$٢ \times \frac{ءص}{ءس} - ٣ = ٠$$

وبالتالى ينتج أن $\frac{ءص}{ءس} = ١,٥$ ، وهى نفس النتيجة التى حصلنا عليها سابقاً بمفاضلة الدالة الصريحة.

مثال (١٧) :

أوجد المعامل التفاضلى الأول $(\frac{ءص}{ءس})$ للدوال الآتية باستخدام التفاضل الضمنى:

(أ) $ص\ س^{٣} = ١٨$

(ب) $ص^{٣} + ص\ س^{٢} + س^{٣} = ٧$

الحـــل

(أ) $ص\ س^{٣} = ١٨$ (نلاحظ أن $ص = \frac{١٨}{س^{٣}}$)

$$ص\ (٣س^{٢}) + س^{٣} \times ١ \times ص^{١-١} \times (\frac{ءص}{ءس}) = ٠$$

$$٣س^{٢}ص + س^{٣} \times (\frac{ءص}{ءس}) = ٠$$

$$\therefore س^{٣} \times \frac{ءص}{ءس} = -٣\ س^{٢}ص$$

$$\therefore \quad \frac{ءص}{ءس} = \frac{-٣س^{٢}ص}{س^{٣}} = \frac{-٣ص}{س}$$

وبالتعويض عن ص = $\frac{١٨}{س^{٣}}$

$$\therefore \quad \frac{ءص}{ءس} = \frac{-٣}{س} \times \frac{١٨}{س^{٣}} = \frac{-٥٤}{س^{٤}}$$

(ب) ص^{٣} + ص س^{٢} + س^{٣} = ٧

$$٣ص^{٢} \frac{ءص}{ءس} + [٢س ص + س^{٢} \frac{ءص}{ءس}] + ٣س^{٢} = ٠$$

$$\therefore ٣ص^{٢} \frac{ءص}{ءس} + س^{٢} \frac{ءص}{ءس} = -٢ س ص - ٣ س^{٢}$$

$$\therefore \frac{ءص}{ءس} \left(٣ص^{٢} + س^{٢}\right) = -٢س ص - ٣س^{٢}$$

$$\therefore \frac{ءص}{ءس} = \frac{-٢س ص - ٣س^{٢}}{٣ص^{٢} + س^{٢}}$$

المعاملات (المشتقات) التفاضلية العليا:

(*) تُعرف المشتقة الثانية (المعامل التفاضلى الثانى) للدالة د(س) علـــى أنهـــا مشتقة المشتقة الأولى د/(س)، ونرمز للمشتقة الثانية بالصورة التالية:

$$\therefore \quad \frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}} = ص'' = د''(س)$$

مثال (١٨) :

أوجد المشتقة الأولى والثانية للدالة : ص = س^{٥} + ٣ س^{٢}

الحـــل

$$\frac{ءص}{ءس} = ص' = د'(س) = ٥ س^{٤} + ٦س$$

وباشتقاق هذه المشتقة مرة أخرى نحصل على المشتقة الثانية:

$$\frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}} = ص'' = د''(س) = ٢٠ س^{٣} + ٦$$

(**) وتعرف المشتقة الثالثة ء$'''$(س) بأنها نـاتج اشـتقاق المـشتقة الثانيـة، والمشتقة الرابعة د$''''$(س) تساوى ناتج اشتقاق المشتقة الثالثة ، وهكذا ....

مثال (١٩) :

فى المثال السابق أوجد المشتقة الثالثة والرابعة والخامسة للدالة.

$$\frac{ء^{٣}ص}{ءس^{٣}} = ص''' = د'''(س) = ٦٠س^{٢}$$

$$\frac{ء^{٤}ص}{ءس^{٤}} = ص'''' = د''''(س) = ١٢٠س$$

$$\frac{ء^{٥}ص}{ءس^{٥}} = ص''''' = د'''''(س) = ١٢٠$$

لاحظ أن المشتقات السادسة والسابعة وما فوق = صفراً.

(***) تسمى المشتقات الثانية والثالثة ولغاية المشتقة التى رتبتها "ن" بالمشتقات العليا حيث "ن" عدد صحيح موجب. ونكتب ذلك بالصيغة $\frac{ء^{ن}ص}{ءس^{ن}}$

التطبيقات التجارية والاقتصادية على التفاضل

لقد ظهر التحليل الحدى كأداة من أدوات التحليل الاقتصادى فى أواخر القرن التاسع عشر، ويستخدم التحليل الحدى فى دراسة موضوعات مختلفة كالمنفعة والإنتاج والإيراد والتكاليف .... ألخ. حيث أصبح من المعتاد التحدث فى التحليل الاقتصادى عن المنفعة الحدية والإنتاج الحدى والإيراد الحدى والتكلفة الحدية .... إلخ. ويلاحظ أن اتخاذ القرارات الخاصة بحل كثير من المشاكل الاقتصادية التى تواجهنا فى الحياة العملية يستدعى حتماً الالتجاء إلى التحليل الحدى. فهل سنقرر زيادة الإنتاج فى المنشأة، وما هى آثار ذلك على كل من التكاليف والإيرادات، وما هى الزيادة التى تقررها فى عدد العاملين نتيجة انخفاض معين فى معدل أجر العامل أو ما هو النقص الذى نقرره فى عدد العاملين نتيجة ارتفاع معين فى معدل أجر العامل. ولا يكون اتخاذ مثل هذه القرارات على مستوى المنشأة فقط بل يكون على مستوى الاقتصاد الكلى مثل تحديد مقدار الزيادة أو النقص فى الكميات المعروضة أو المطلوبة فى الأسواق نتيجة تغير السعر أو الدخل أو التكاليف أو الإنتاج.

وفى هذا الجزء من الدراسة سوف نستخدم المعامل التفاضلى للدالة فى قياس مرونة الطلب والعرض والتكاليف الحدية والإيراد الحدى.

أولاً: مرونة الطلب:

من المعلومات الاقتصادية نعلم أن الطلب دالة متناقصة فى السعر ويتبين، من هذا أن الطلب على السلع يتأثر بما يحدث من تغير فى سعرها ويستجيب له. وتُعرف مرونة الطلب اقتصادياً بأنها درجة استجابة الكمية المطلوبة من سلعة ما

لما يحدث من تغير فى سعرها مع افتراض بقاء الأشياء الأخرى التى يمكن أن تؤثر فى الطلب على حالها وعدم حدوث أى تغير فيها. ولقياس مرونة الطلب لابد أن نقارن التغير النسبى (وليس المطلق) الذى يحدث فى الكمية المطلوبة بالتغير النسبى (وليس المطلق) الذى يحدث فى السعر.

وتقاس مرونة الطلب كالتالى:

$$\frac{\text{النسبة المئوية للتغير فى الكمية المطلوبة}}{\text{النسبة المئوية للتغير فى السعر}}$$

فإذا رمزنا للسعر قبل وبعد التغير بالرمز $س_١$ ، $س_٢$ على الترتيب، وللكمية المطلوبة قبل وبعد التغير بالرمز $ك_١$ ، $ك_٢$ على الترتيب. فإنه يمكن قياس المرونة كالتالى :

$$\left[\frac{ك_٢ - ك_١}{ك_١} \times ١٠٠\right] \div \left[\frac{س_٢ - س_١}{س_١} \times ١٠٠\right]$$

أى أن : $$\left[\frac{\Delta ك}{ك} \times ١٠٠\right] \div \left[\frac{\Delta س}{س} \times ١٠٠\right] = \frac{س}{ك} \times \frac{\Delta ك}{\Delta س}$$

وتكون المرونة عند السعر (س):

$$\frac{س}{ك} \; \lim_{\Delta س \to ٠} \frac{\Delta ك}{\Delta س} = \frac{س}{ك} \times \frac{ء ك}{ء س} = \text{المرونة}$$

$$\therefore \text{مرونة الطلب} = \frac{\text{السعر}}{\text{الكمية المطلوبة}} \times \text{المشتقة الأولى للكمية المطلوبة بالنسبة للسعر}$$

ويلاحظ على مرونة الطلب وفقاً لما تقض به النظرية الاقتصادية أنها تأخذ أحد الأشكال التالية:

١- يكون الطلب قليل المرونة إذا كانت المرونة محصورة بين ٠ ، −١ .

٢- يكون الطلب كثير المرونة إذا كانت المرونة محصورة بين −١ ، −∞.

٣- يكون الطلب متكافئ المرونة إذا كانت المرونة تساوى −١ .

وواضح أن مرونة الطلب تكون دائماً سالبة مما يدل على أن العلاقة بين المتغيرين (السعر والطلب) علاقة عكسية.

مثال (٢٠):

إذا كانت دالة الطلب على سلعة ما تعطى بالدالة التالية:

$$ك = ٢٠٠ - ١٠ س$$

حيث ك : الكمية المطلوبة ، س : سعر السلعة

فاحسب مرونة الطلب إذا كان سعر الوحدة : ٦ جنيه ، ٩ جنيه ، ١٦ جنيه .

الحـــل

$$\text{مرونة الطلب} = \frac{\text{السعر}}{\text{الكمية المطلوبة}} \times \text{المشتقة الأولى للكمية المطلوبة بالنسبة للسعر}$$

$$= \frac{س}{ك} \times \frac{ءك}{ءس}$$

$$= \frac{س}{٢٠٠-١٠س} \times -١٠ = \frac{-١٠س}{٢٠٠-١٠س}$$

<u>عند سعر ٦ جنيه (س = ٦) :</u>

مرونة الطلب = $\frac{-١٠×٦}{٢٠٠-١٠(٦)} = -\frac{٣}{٧}$

• معنى ذلك أن الطلب على هذه السلعة قليل المرونة عند السعر ٦ جنيه.

<u>عند سعر ٩ جنيهات (س = ٩) :</u>

مرونة الطلب = $\frac{-١٠×٩}{٢٠٠-١٠(٩)} = -\frac{٩}{١١}$

* ومعنى ذلك أن الطلب على هذه السلعة قليل المرونة أيضاً عند السعر ٩ جنيهات.

<u>عند سعر السلعة ١٦ جنيه (س = ١٦) :</u>

مرونة الطلب = $\frac{-١٠×١٦}{٢٠٠-١٠(١٦)} = -٤$

* ومعنى ذلك أن الطلب على هذه السلعة كثير المرونة عند السعر ١٦ جنيهاً.

مثال (٢١) :

إذا كانت العلاقة بين السعر (س) والكمية المطلوبة (ك) كالتالى:

س = ٥٠٠٠ - ٢ ك ، س > ٠

فاحسب مرونة الطلب عندما تكون كمية الطلب ١٠٠٠ وحدة، ٥٠٠ وحدة.

الحـــل

∵ $س = ٥٠٠٠ - ٢ك$

∴ $٢ك = ٥٠٠٠ - س$

∴ $ك = ٢٥٠٠ - \frac{١}{٢} س$

∴ $\frac{دك}{دس} = -\frac{١}{٢}$

∴ مرونة الطلب $= \frac{س}{ك} \times \frac{دك}{دس}$

$$= \frac{٥٠٠٠ - ٢ك}{ك} \times -\frac{١}{٢} = \frac{٢(٢٥٠٠ - ك)}{ك} \times -\frac{١}{٢}$$

$$= -\frac{٢٥٠٠ - ك}{ك} = \frac{ك - ٢٥٠٠}{ك} = ١ - \frac{٢٥٠٠}{ك}$$

<u>* عند كمية طلب (ك) = ١٠٠٠ وحدة:</u>

مرونة الطلب $= ١ - \frac{٢٥٠٠}{١٠٠٠} = -١,٥$

** عند كمية طلب (ك) = ٥٠٠ وحدة :

مرونة الطلب $= ١ - \frac{٢٥٠٠}{٥٠٠} = -٤$

مثال (٢٢) :

إذا كانت العلاقة بين السعر والطلب (ك) على إحدى السلع كالتالى :

$$ك = ٥٠٠٠$$

أحسب مرونة الطلب عند مستويات السعر المختلفة، وفسر النتائج.

الحـــل

$$\text{مرونة الطلب} = \frac{س}{ك} \times \frac{ءك}{ءس}$$

$$= \frac{س}{٥٠٠٠} \times \text{صفر} = \text{صفر}$$

أى أن مرونة الطلب عند جميع مستويات الأسعار تساوى صفر ، وهذا يعنى أن الطلب على هذه السلعة غير مرن.

مثال (٢٣) :

إذا كانت العلاقة بين السعر (س) والكمية المطلوبة (ك) علـى إحـدى السلع هى:

$$ك = \frac{٢٠٠}{س^{٤}}$$

فأحسب مرونة الطلب السعرية.

الحـــل

$$\because ك = ٢٠٠ \, س^{-٤}$$

$$\frac{ءك}{ءس} = -٨٠٠ \, س^{-٥}$$

$$\because \text{مرونة الطلب} = \frac{\text{س}}{\text{ك}} \times \frac{\text{دك}}{\text{دس}}$$

$$\therefore \text{مرونة الطلب} = \frac{\text{س}}{\text{٢٠٠ س}^{-٤}} \times -\text{٨٠٠ س}^{-٥}$$

$$= \frac{\text{١}}{\text{٢٠٠ س}^{-٥}} \times -\text{٨٠٠ س}^{-٥} = -\text{٤}$$

مثال (٢٤) :

إذا كانت معادلة الطلب على سلعة معينة تتحدد بالعلاقة التالية:

$\text{ك} = \frac{\text{١٠٠٠}}{\text{هـ}^{\text{٠,١س}}}$ فأوجد المرونة عند السعر (س) = ١٠

الحـــــل

$$\because \text{ك} = \frac{\text{١٠٠٠}}{\text{هـ}^{\text{٠,١س}}} = \text{١٠٠٠ هـ}^{-\text{٠,١س}}$$

$$\frac{\text{دك}}{\text{دس}} = (-\text{٠,١})(\text{١٠٠٠})\ \text{هـ}^{-\text{٠,١س}} = -\text{١٠٠ هـ}^{-\text{٠,١س}}$$

$$\therefore \text{المرونة} = \frac{\text{س}}{\text{ك}} \times \frac{\text{دك}}{\text{دس}}$$

$$= \frac{\text{س}}{\text{١٠٠٠ هـ}^{-\text{٠,١س}}} \times -\text{١٠٠ هـ}^{-\text{٠,١س}} = -\text{٠,١س}$$

∴ مرونة الطلب عند السعر (س) = ١٠ هى :

المرونة = -٠,١ × ١٠ = -١

أى أن الطلب على هذه السلعة متكافئ المرونة.

ثانياً: مرونة العرض :

تعرف مرونة العرض بأنها درجة إستجابة الكمية المعروضة من السلعة لما يحدث من تغير فى سعرها ، ولقياس مرونة العرض نقارن التغير النسبى الذى يحدث فى الكمية المعروضة بالتغير النسبى الذى يحدث فى السعر. بالتالى فإن مرونة العرض تحسب كالآتى:

مرونة العرض = النسبة المئوية للتغير فى الكمية المعروضة مقسوماً على النسبة المئوية للتغير فى السعر.

وبنفس الطريقة التى يتم بها حساب مرونة الطلب يمكن حساب مرونة العرض عند سعر معين.

$$\text{مرونة العرض} = \frac{س}{ك} \times \frac{ءك}{ءس}$$

حيث : س سعر السلعة ، ك : الكمية المعروضة من السلعة

ويجب ملاحظة أن مرونة العرض تكون موجبة لأن العلاقة بين السعر والعرض علاقة طردية بمعنى أنه كلما ارتفع الثمن فإن ذلك يؤدى إلى تمدد الكمية المعروضة أو العكس كلما أنخفض السعر انخفضت الكمية المعروضة.

مثال (٢٥) :

إذا كانت العلاقة بين سعر السلعة (س) والكمية المعروضة منها (ك) كالآتى:

$ك = ٨ س^{٢}$

فالمطلوب إيجاد مرونة العرض عند السعر ٨ جنيهات للوحدة.

الحـــل

مرونة العرض = $\frac{س}{ك} \times \frac{ءك}{ءس}$

= $\frac{س}{٨س^٢} \times ١٦س = ٢$

ويُعنى ذلك أن أى زيادة طفيفة جداً فى السعر سوف تؤدى إلى زيـــادة الكميـــة المعروضة بمقدار ضعف الزيادة فى السعر.

مثال (٢٦) :

إذا كانت العلاقة بين العرض (ك) والسعر (س) كالتالى:

$ك = ٦ س^٣$

فاحسب مرونة العرض عندما يكون سعر الوحدة ١٠ جنيهات.

الحـــل

مرونة العرض = $\frac{س}{ك} \times \frac{ءك}{ءس}$

= $\frac{س}{٦س^٣} \times ١٨س^٢ = ٣$

وهذا يعنى أنه بزيادة السعر أى زيادة طفيفة جداً فإن الكمية المعروضـــة مـــن السلعة سوف تزداد بمقدار ثلاثة أضعاف الزيادة فى السعر.

مثال (٢٧):

بافتراض أن العلاقة بين السعر (س) والكمية المطلوبة (ك) كالآتى:

ك = ٣ − ٠,١ س

(أ) فأوجد مرونة الطلب عند السعر = ١٠

(ب) ثم أوجد عند أى سعر وأى كمية تكون مرونة الطلب = −٢

الحـــل

(أ) ∵ الكمية (ك) = ٣ − ٠,١ س

∴ تفاضل الكمية (ك) = ٠ − ٠,١ = −٠,١

$$\text{المرونة} = \frac{\text{السعر}}{\text{الكمية}} \times \text{تفاضل الكمية}$$

$$\text{المرونة} = \frac{\text{س}}{\text{٣} - \text{٠,١س}} \times \text{−٠,١} = \frac{\text{−٠,١س}}{\text{٣} - \text{٠,١س}}$$

وعند السعر (س) = ١٠ فإن المرونة هى :

$$\text{المرونة} = \frac{\text{−٠,١(١٠)}}{\text{٣} - \text{٠,١(١٠)}} = \frac{\text{−١}}{\text{٣} - \text{١}} = -\frac{\text{١}}{\text{٢}}$$

(ب) وبالتعويض عن المرونة = −٢

$$\frac{\text{−٠,١س}}{\text{٣} - \text{٠,١س}} = \text{−٢}$$

∴ −٠,١س = (٣ − ٠,١س) × −٢

−٠,١س = −٦ + ٠,٢ س

−٠,١س − ٠,٢س = −٦

−٠,٣س = −٦

س = $\frac{-٦}{-٣,}$ = ٢٠ ← السعر

وبالتعويض عن س = ٢٠ فى معادلة الكمية (ك) كالآتى:

ك = ٣ - ٠,١ س = ٣ - ٠,١ (٢٠) = ١

مثال (٢٨) :

إذا كانت العلاقة بين السعر (س) والكمية المعروضة (ك) كالآتى:

س = ٢ + ٠,٢ ك

فأوجد :

(أ) مرونة العرض عند السعر (س) = ٥

(ب) عند أى سعر وأى كمية تكون مرونة العرض = ٣

الحـــــل

∵ س = ٢ + ٠,٢ ك

∴ ك = $\frac{س}{٢,}$ - $\frac{٢}{٢,}$

ك = ٥ س - ١٠

تفاضل الكمية (ك َ) = ٥

المرونة = $\frac{السعر}{الكمية}$ × تفاضل الكمية

المرونة = $\frac{س}{٥س - ١٠}$ × ٥ = $\frac{٥س}{٥س - ١٠}$

وعند السعر (س) = ٥ تصبح المرونة كالتالى :

$$\text{المرونة} = \frac{٥(٥)}{٥(٥)-١٠} = \frac{٢٥}{٢٥-١٠} = \frac{٢٥}{١٥} = \frac{٥}{٣}$$

(ب) عند مرونة عرض = ٣

$$\frac{٥س}{٥س-١٠} = ٣$$

١٥س − ٣٠ = ٥س

١٥ س − ٥ س = ٣٠

١٠ س = ٣٠

∴ س = ٣

وبالتعويض عن (س) = ٣ فى معادلة الكمية (ك):

الكمية = ٥س − ١٠ = ٥ (٣) − ١٠ = ٥

مثال (٢٩) :

إذا كانت معادلة الطلب لسلعة ماهى : ط = ١٠٠ − ٠,١س^{٢}

ومعادلة العرض هى : ك = −٢٠ + ٠,١س^{٢}

حيث س : السعر ، (ط ، ك) الكمية المطلوبة والمعروضة على الترتيب.

فأوجد مرونة الطلب ومرونة العرض عند توازن السوق.

الحـــل

عند توازن السوق : الطلب = العرض

$$١٠٠ - ٠,١ \text{ س}^{٢} = -٢٠ + ١,١ \text{ س}^{٢}$$

$$١٠٠ + ٢٠ = ٠,١ \text{ س}^{٢} + ١,١ \text{ س}^{٢}$$

$$١٢٠ = ١,٢ \text{ س}^{٢}$$

$$\text{س}^{٢} = \frac{١٢٠}{١,٢}$$

$$\text{س}^{٢} = ١٠٠$$

$$\text{س} = ١٠$$ (السعر دائماً موجب)

(*) إيجاد مرونة الطلب عند س = ١٠ :

الكمية المطلوبة = ١٠٠ − ٠,١ س^{٢}

تفاضل الكمية = ٠ − ٠,٢ س^{١} = −٠,٢ س

$$\text{مرونة الطلب} = \frac{\text{السعر}}{\text{الكمية المطلوبة}} \times \text{تفاضل الكمية}$$

$$= \frac{\text{س}}{١٠٠ - ١,\text{س}^{٢}} \times (-٢,\text{س})$$

$$= \frac{-٢,س^{٢}}{١٠٠-١,س^{٢}}$$

$$= \frac{-٢,(١٠)^{٢}}{١٠٠-١,(١٠)^{٢}}$$ (وعند س = ١٠)

$$= \frac{-٢٠}{١٠٠-١٠} = \frac{-٢٠}{٩٠} = \frac{-٢}{٩}$$

(*) إيجاد مرونة العرض عند س = ١٠:

الكمية المعروضة = −٢٠ + ١,١ س^{٢}

تفاضل الكمية = ٠ + ٢,٢ س^{١} = ٢,٢ س

مرونة العرض = $\frac{\text{السعر}}{\text{الكمية المعروضة}}$ × تفاضل الكمية

$$= \frac{س}{-٢٠+١,١س^{٢}} \times (٢,٢س)$$

$$= \frac{٢,٢س^{٢}}{٢٠+١,١س^{٢}}$$

$$= \frac{٢,٢(١٠)^{٢}}{-٢٠+١,١(١٠)^{٢}}$$ (وعند س = ١٠)

$$= \frac{٢٢٠}{-٢٠+١١٠} = \frac{٢٢٠}{٩٠} = \frac{٢٢}{٩}$$

ثالثاً: التكاليف الكلية والحدية والمتوسطة:

تُقاس التكلفة الحدية بخارج قسمة الزيادة فى التكاليف الكلية الناتجة من الزيادة فى الكمية المنتجة على الزيادة فى الكمية المنتجة وذلك عندما تزيد الكمية المنتجة بمقدار قليل (يقترب من الصفر). ولذلك يمكن تعريف التكلفة الحدية رياضياً بأنها عبارة عن نهاية النسبة : $\frac{\text{الزيادة فى التكاليف الكلية}}{\text{الزيادة فى الإنتاج}}$

عندما تقترب الزيادة فى الإنتاج من الصفر. وبالتالى يمكن أن نعبر عن التكلفة الحدية بأنها المشتقة الأولى لمعادلة التكاليف الكلية. كما يمكن الحصول على التكلفة المتوسطة بقسمة التكاليف الكلية على عدد الوحدات المنتجة.

مثال (٣٠):

إذا كانت دالة التكاليف الكلية (ص) توضحها المعادلة التالية:

$$ص = ٢٥س^{٣} + ٥س^{٢} + ٤س + ١٠٠٠$$

المطلوب: (أ) تقدير التكلفة الحدية عندما يكون حجم الانتاج (س) = ٥ .

(ب) تقدير معادلة التكاليف المتوسطة.

الحل

(أ) للحصول على معادلة التكلفة الحدية نفاضل معادلة التكاليف الكلية كالتالى:

$$\frac{دص}{دس} = ٧٥ س^{٢} + ١٠ س + ٤$$

وعند س = ٥ فإن التكلفة الحدية تكون :

$$\frac{دص}{دس} = ٧٥ (٥)^{٢} + ١٠ (٥) + ٤ = ١٩٢٩ \text{ جنيه}$$

(ب) التكلفة المتوسطة = التكاليف الكلية ÷ حجم الانتاج (س)

$$= \frac{٢٥س^{٣} + ٥س^{٢} + ٤س + ١٠٠٠}{س}$$

$$= ٢٥ س^{٢} + ٥ س + ٤ + \frac{١٠٠٠}{س}$$

مثال (٣١):

إذا كانت دالة التكلفة الكلية لإحدى الشركات هى: ص= ٠,٢ $س^{٢}$ + ٢س + ٥٠ حيث س تمثل عدد الوحدات المنتجة ، فأوجد دالة التكلفة الحدية ودالة التكلفة المتوسطة.

الحـــل

* دالة التكلفة الحدية :

$$\frac{ءص}{ءس} = ٠,٤ س + ٢$$

** دالة التكلفة المتوسطة :

$$= \frac{٠,٢س^{٢} + ٢س + ٥٠}{س} = ٠,٢س + ٢ + \frac{٥٠}{س}$$

رابعاً: الإيراد الكلى والإيراد الحدى والإيراد المتوسط:

الإيراد الكلى هو مجموع المبالغ المتحصلة من البيع، أى أنه يمثل حاصل ضرب السعر فى الكميات المباعة:

الإيراد الكلى = سعر الوحدة × عدد الوحدات المباعة

أما الإيراد المتوسط فهو خارج قسمة الإيراد الكلى على الكميات المباعة، أى هو سعر بيع الوحدة إذا بيعت جميع الوحدات بنفس السعر. أى أن :

الإيراد المتوسط = الإيراد الكلى ÷ عدد الوحدات المباعة

والإيراد الحدى يُعرف بأنه عبارة عن معدل التغير اللحظى فى الإيراد الكلى نتيجة تغير طفيف فى الكميات المباعة، أى أنه يمكن اعتباره المشتقة الأولى للايراد الكلى.

مثال (٣٢) :

إذا كانت دالة الإيراد الكلى هى : ص = ٤٠٠س – ٥س^{٢}. فأوجد دالة الإيراد الحدى عندما يكون حجم الإنتاج أو المبيعات ٥.

الحـــل

* الإيراد الحدى هو المعامل التفاضلى الأول للإيراد الكلى :

$$\frac{ءص}{ءس} = ٤٠٠ - ١٠ \text{ س}$$

وعندما يكون (س = ٥) فإن :

$$\frac{ءص}{ءس} = ٤٠٠ - ١٠ (٥) = ٣٥٠$$

مثال (٣٣) :

بافتراض أن السعر (س) والكمية (ك) المطلوبة من سلعة ما تربطهما العلاقة التالية : س = ١٠-٢ك. فأوجد معادلة الإيراد الحدى والإيراد المتوسط.

الحـــل

الإيراد الكلى = السعر × الكمية

= س × ك = (١٠ – ٢ ك) × ك = ١٠ ك – ٢ ك^{٢}

وعلى ذلك فإن الإيراد الحدى هو تفاضل الإيراد الكلى كالتالى:

الإيراد الحدى = ١٠ – ٤ ك

وكذلك فإن الإيراد المتوسط = السعر = ١٠ – ٢ك

خامساً: الربح الحدى:

من المعروف أن الربح الكلى = الإيراد الكلى – التكلفة الكلية، وبالتالى فإن الربح الحدى هو المعامل التفاضلى الأول (المشتقة الأولى) لدالة الربح الكلى.

مثال (٣٤) :

إذا كانت دالة الطلب على منتج ما هى ع = ١٠٠ – ٠,٠٥س حيث تمثل ع سعر بيع الوحدة ، س هى الكمية المطلوبة. وكانت دالة التكلفة الكلية هى (٥٠٠٠ + ١٠ س) . فأحسب الربح الحدى عند إنتاج وبيع :

(أ) ٥٠ وحدة.   (ب) ٥٠٠ وحدة.

الحـــل

الإيراد الكلى = السعر × الكمية

$= (١٠٠ - ٠,٠٥س) \times س = ١٠٠س - ٠,٠٥س^{٢}$

وحيث أن الربح = الإيراد الكلى – التكلفة الكلية

$\therefore$ الربح $= (١٠٠س - ٠,٠٥س^{٢}) - (٥٠٠٠ + ١٠س)$

$ر = ١٠٠س - ٠,٠٥س^{٢} - ٥٠٠٠ - ١٠س$

$ر = ٩٠س - ٠,٠٥س^{٢} - ٥٠٠٠$

ولايجاد دالة الربح الحدى نُفاضل دالة الإيراد الكلى كالتالى:

$$\frac{ءر}{ءس} = ٩٠ - ٠,١س$$

(أ) الربح الحدى عند إنتاج وبيع ٥٠ وحدة :

$$\frac{ءر}{ءس} = ٩٠ - ٠,١ (٥٠) = ٨٥$$ جنيه.

(ب) الربح الحدى عند إنتاج وبيع ٥٠٠ وحدة:

$$\frac{ءر}{ءس} = ٩٠ - ٠,١ (٥٠٠) = ٤٠$$ جنيه

أى أنه عند أنتاج ٥٠ وحدة فإن الربح الحدى للوحدة الإضافية الجديدة هـو ٨٥ جنيه ، بينما عند إنتاج ٥٠٠ وحدة فإن الربح الحدى للوحدة الإضافية هـو ٤٠ جنيه.

مثال (٣٥) :

إذا كانت تكلفة إنتاج س من الوحدات هـــي ت = ٥٠٠٠ + ٠,٠٥س^{٢} ، فإذا تم إنتاج ٢٠٠ وحدة في الشهر، فأوجد: التكلفة الكلية، التكلفـــة المتوســـطة، التكلفة الحدية.

الحـــل

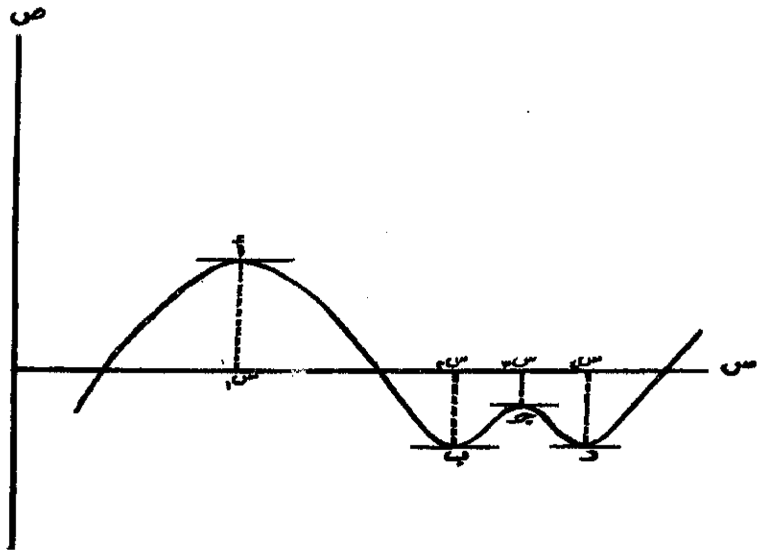
التكلفة الكلية = ٥٠٠٠ + ٠,٠٥ (٢٠٠)^{٢} = ٢٥٠٠٠ جنيه

التكلفة المتوسطة = $\frac{٢٥٠٠٠}{٢٠٠}$ = ١٢,٥ جنيه

التكلفة الحدية = $\frac{ءت}{ءس}$ = ٠,١س

سادساً: النهايات الصغرى والنهايات العظمى لدالة في متغير واحد:

نهايات الدالة هى أقصى قيمة أو أدنى قيمة تأخذها الدالة ضـــمن مـــدى معين لقيم المتغير المستقل على أنه يجب أن نلاحظ أن هذه القيم تكـــون أدنـــى وأقصى قيم بالنسبة للقيم الأخرى المجاورة لها. وتسمى هـــذه القـــيم بالنهايـــة العظمى والنهاية الصغرى. وتتضح هذه النهايات بالرسم التالي:

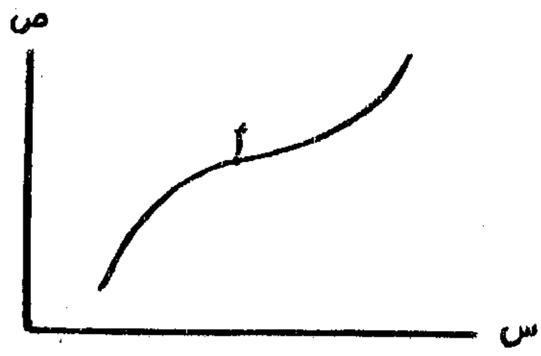


من الرسم يتبين أن النقط أ ، ب ، ج، د تمثل نهايات الدالة بالنسبة للقيم المجاورة لها ، فهى ليست نهايات بمعنى أعلى قيمة وأدنى قيمة وإنما هى نهايات نسبياً إلى القيم المجاورة لها. والنقطتان أ، جـ تمثلان أعلى نقط بالنسبة للنقط المجاورة لها، فكل منهما بذلك تكون نهاية عظمى على المنحنى، والنقطتان ب، د تمثلان أدنى نقط بالنسبة للنقط المجاورة لها وبذلك تكون نهاية صغرى على المنحنى. وبشكل آخر نقول أن المنحنى له نهاية عظمى عند كل من $س_1$، $س_3$ ونهاية صغرى عند كل من $س_2$ ، $س_4$.

ويتضح من الرسم أن النقط لكى تكون نهايات يجب أن يكون المماس للمنحنى عندها موازياً للمحو الأفقى أى يكون ميله= صفر، وبذلك تكون المشتقة الأولى للدالة عند هذه النقطة = صفر. ولكى تكون النقطة نهاية عظمى يجب بالإضافة إلى الشرط السابق أن يكون الميل قبلها موجباً وبعدها سالباً. كذلك لكى

تكون النقطة نهاية صغرى يجب بالإضافة إلى الشرط الأول أن يكون الميل قبلها سالباً وبعدها موجباً. وبذلك نلاحظ أنه ليس معنى أن $\frac{دص}{دس}$ = صفر أن تكون النقطة نهاية عظمى أو نهاية صغرى حيث يجب أن تتحول $\frac{دص}{دس}$ من موجب إلى سالب في حالة النهاية العظمى أو من سالب إلى موجب في حالة النهاية الصغرى.

ويتضح ذلك من الرسم التالى حيث نلاحظ أن النقطة أ لا تدل على نهاية عظمى بالرغم من المماس لها يكون أفقياً أى ميله = صفر ذلك لأن $\frac{دص}{دس}$ لا تتحول من موجب إلى سالب عند هذه النقطة أو العكس.



لذلك فإنه توجد طريقتان لمعرفة نقاط النهاية العظمى والنهاية الصغرى.

الطريقة الأولى:

إيجاد المشتقة الأولى للدالة ومساواة التفاضل بالصفر وإيجاد قيم س التى عندها $\frac{دص}{دس}$ تساوى صفراً. وباختبار النقاط (أى قيم س) بقيمة قريبة قبلها وقيمة قريبة بعدها ومشاهدة تغير إشارة الدالة.

مثال (٣٦) :

أوجد النهاية العظمى أو النهاية الصغرى للدالة الآتية:

$$ص = س^{٣} - ٣ س^{٢} + ٥$$

الحــــل

$\therefore \frac{ءص}{ءس} = ٣ س^{٢} - ٦ س$

$\therefore ٣ س^{٢} - ٦ س = صفر$

$\therefore س^{٢} - ٢ س = صفر$ (بقسمة الطرفين على ٣)

$\therefore س (س - ٢) = صفر$ (بأخذ س عامل مشترك)

$\therefore$ أما أن س = صفر أو س = ٢

(*) عند س = ٢ :

إذا أخذنا قيمة أقل منها ١,٥ وعوضنا فى المشتقة كان الناتج سالب، وإذا أخذنا قيمة أكبر منها ٢,٥ وعوضنا فى المشتقة نحصل على قيمة موجبة. وبذلك تكون الدالة عند نهايتها الصغرى عندما س = ٢ (تتحول إشارة المشتقة الأولى من سالب إلى موجب).

(**) عند س = صفر :

إذا أخذنا قيمة أقل منها -٠,٥ وعوضنا بها فى المشتقة حصلنا على قيمة موجبة، وإذا أخذنا قيمة أكبر منها ٠,٥ وعوضنا بها فى المشتقة نحصل على مقدار سالب، وبذلك تكون الدالة عند نهايتها العظمى عندما س = صفر (تتحول إشارة المشتقة الأولى من موجب إلى سالب).

مثال (٣٧) :

أختبر النهاية العظمى والنهاية الصغرى للدالة التالية:

ص = س^{٣} − ٣س^{٢} − ٩ س + ٦

الحـــل

$\frac{ءص}{ءس}$ = ٣ س^{٢} − ٦ س − ٩

∴ ٣س^{٢} − ٦س − ٩ = صفر

∴ س^{٢} − ٢س − ٣ = صفر (بقسمة الطرفين على ٣)

(س − ٣) (س + ١) = صفر

∴ أما أن س = ٣ أو س = −١

(*) عند س = ٣ :

نلاحظ أنه إذا كانت س < ٣ فإن إشارة $\frac{ءص}{ءس}$ تكون سالب، وإذا كانت س > ٣ فإن إشارة $\frac{ءص}{ءس}$ تكون موجب . أى أن إشارة $\frac{ءص}{ءس}$ تغيرت مـن سـالب إلـى موجب، وبالتالى توجد نهاية صغرى عند س = ٣ .

(**) عند س = −١ :

إذا كانت س < −١ فإن إشارة $\frac{ءص}{ءس}$ تكون موجب.

وإذا كانت س > −١ فإن إشارة $\frac{ءص}{ءس}$ تكون سالب.

وحيث أن إشارة $\frac{ءص}{ءس}$ تغيرت من موجب إلى سالب فإنه توجد نهاية عظمى عند س = −١ .

إلا أن إجراء هذه العمليات لتحديد النهاية العظمى والنهاية الصغرى يحتاج إلـى بعض المجهود.

الطريقة الثانية:

تستخدم هذه الطريقة المعامل التفاضلي الثاني ليرشدنا إلى هذه النهايــات. فلقد تبين لنا من المناقشة السابقة أنه عند نقطة النهاية العظمى تتحول المــشتقة الأولى ($\frac{ءص}{ءس}$) من موجب إلى صفر إلى سالب أي أنها تكون في تناقص ولذلك فإن المشتقة الثانية تكون قيمتها سالبة عند نقطة النهاية العظمى (المشتقة الثانية تبين التغير في المشتقة الأولى من ناحية القيمة والإشارة). كما أنه عنــد نقطـــة النهاية الصغرى تتحول المشتقة الأولى من سالب إلى صفر إلى موجب أي أنها تكون في ازدياد ولذلك فإن المشتقة الثانية تكون قيمتها موجبة عند نقطة النهاية الصغرى.

أي أن هذه الطريقة تمر بالخطوات التالية:

١- إيجاد المشتقة الأولى ($\frac{ءص}{ءس}$) للدالة وتساويها بالصفر لإيجاد قيم س.

٢- إيجاد المشتقة الثانية ($\frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}}$).

٣- نعوض بقيم س التي حصلنا عليها من الخطوة الأولى في المشتقة الثانية ونشاهد إشارة النتائج، فإذا كانت:

(I) إشارة المقدار سالب يكون للدالة نهاية عظمى.

(II) إشارة المقدار موجب يكون للدالة نهاية صغرى.

مثال (٣٨) :

إذا كانت ص = ٣س^{٢} − ١٢س + ١٠٠

فأوجد النهايات العظمى أو الصغرى إن وجدت.

الحـــل

(١) إيجاد التفاضل الأول :

ص$^{/}$ = ٦ س − ١٢

(٢) مساواة ص$^{/}$ بالصفر :

٦ س − ١٢ = صفر

٦ س = ١٢

س = ٢

(٣) إيجاد التفاضل الثانى:

ص$^{''}$ = تفاضل ص$^{/}$ = ٦ ← (+) ← نهاية صغرى

(٤) التعويض عن س = ٢ فى الدالة المعطاة لإيجاد قيمة ص :

ص = ٣ س^{٢} − ١٢ س + ١٠٠

= ٣ (٢)^{٢} − ١٢(٢) + ١٠٠

= ١٢ − ٢٤ + ١٠٠ = ٨٨

∴ توجد نهاية صغرى عند (٢ ، ٨٨) .

مثال (٣٩) :

إذا كانت ص = −٣س^{٢} + ١٢س + ١٠٠

فأوجد النهايات العظمى أو الصغرى إن وجدت .

الحـــل

(١) إيجاد التفاضل الأول :

ص/ = −٦ س + ١٢

(٢) مساواة ص/ بالصفر :

−٦ س + ١٢ = صفر

١٢ = ٦س

س = $\frac{١٢}{٦}$ = ٢

(٣) إيجاد التفاضل الثانى:

ص" = تفاضل ص/ = −٦ ← (−) ← نهاية عظمى

(٤) التعويض عن س = ٢ فى الدالة المعطاة لإيجاد قيمة ص :

ص = −٣ س^{٢} + ١٢ س + ١٠٠

= −٣ (٢)^{٢} + ١٢(٢) + ١٠٠

= −١٢ + ٢٤ + ١٠٠ = ١٢٢

∴ توجد نهاية عظمى عند (٢ ، ١١٢).

مثال (٤٠):

إذا كانت ص = ٢س^{٣} − ٣س^{٢} − ١٢ س

فأوجد إحداثيات النهايات العظمى أو الصغرى إن وجدت.

الحـــل

(*) إيجاد التفاضل الأول :

ص/ = ٦س^{٢} − ٦ س − ١٢

(*) مساواة التفاضل الأول بالصفر

٦ س^{٢} – ٦س – ١٢ = صفر

س^{٢} – س – ٢ = صفر (بالقسمة على ٦)

(س – ٢) (س + ١) = صفر

س – ٢ = صفر أو س + ١ = صفر

∴ س = ٢ ∴ س = –١

إيجاد التفاضل الثانى :

ص" = ١٢ س – ٦

عند س = ٢

ص" = ١٢س – ٦

= ١٢(٢) –٦ = ١٨

(+) نهاية صغرى

عند س = –١

ص" = ١٢س –٦

= ١٢ (–١) –٦ = – ١٨

(–) نهاية عظمى

∴ التعويض بقيم س = ٢ ، –١ فى الدالة المعطاة لإيجاد قيمة ص :

ص = ٢ س^{٣} – ٣ س^{٢} – ١٢ س

= ٢ (٢)^{٣} – ٣ (٢)^{٢} – ١٢ (٢)

= ١٦ – ١٢ – ٢٤ = –٢٠

توجد نهاية صغرى عند (٢ ، –٢٠)

ص = ٢س^{٣} – ٣س^{٢} – ١٢س

= ٢(–١)^{٣} – ٣ (–١)^{٢} – ١٢ (–١)

= –٢ – ٣ + ١٢ = ٧

توجد نهاية عظمى عند (–١ ، ٧)

مثال (٤١) :

شركة يمكنها أن تبيع "س" وحدة بسعر "ع" يتحدد بالمعادلة:

ع = ٢٠٠ – ٠,٢ س

وتكلفة كلية ت = ٥٠ س + ١٠٠٠٠

فكم وحدة من س تجعل الربح أكبر ما يمكن، وما مقدار ع ، وما الربح. باستخدام التفاضل.

الحـــل

الربح = الإيراد الكلى – التكلفة الكلية

ر = (سعر الوحدة × عدد الوحدات) – التكلفة الكلية

ر = [(٢٠٠ – ٠,٢س) × س] – [٥٠س + ١٠٠٠٠]

= ٢٠٠ س – ٠,٢س^{٢} – ٥٠ س – ١٠٠٠٠

ر = –٠,٢ س^{٢} + ١٥٠ س – ١٠٠٠٠

<u>**ثم يتم تطبيق الخطوات السابقة كالآتى:**</u>

(١) ر/= تفاضل (–٠,٢س^{٢} + ١٥٠ س – ١٠٠٠٠)

ر/= –٠,٤س + ١٥٠

(٢) مساواة ر/ بالصفر :

-٠,٤ س + ١٥٠ = صفر

١٥٠ = ٠,٤س

س = $\frac{١٥٠}{,٤}$ = ٣٧٥

(٣) إيجاد التفاضل الثانى (ر") :

ر" = تفاضل (- ٠,٤س + ١٥٠)

ر" = - ٠,٤ ← سالب ← نهاية عظمى للربح

أى أنه عند إنتاج (س = ٣٧٥ وحدة) يكون الربح أكبر ما يمكن .

<u>إيجاد السعر (ع) :</u>

بالتعويض عن س = ٣٧٥ فى معادلة السعر :

ع = ٢٠٠ - ٠,٢ س = ٢٠٠ - ٠,٢ (٣٧٥)

= ٢٠٠ - ٧٥ = ١٢٥

<u>إيجاد الربح (ر) :</u>

بالتعويض عن س = ٣٧٥ فى معادلة الربح :

ر = -٠,٢س^{٢} + ١٥٠ س - ١٠٠٠٠

= -٠,٢ (٣٧٥)^{٢} + ١٥٠ (٣٧٥) - ١٠٠٠٠

= - ٢٨١٢٥ + ٥٦٢٥٠ - ١٠٠٠٠ = ١٨١٢٥

مثال (٤٢) :

محتكر لسلعة يبيع شهرياً (س) وحدة بتكلفة (ت) حيث

(ت) = ٠,٧ س^{٢} + ٤٠س + ٤٠٠٠٠

وبافتراض أن سعر الوحدة (ع) هو (ع) = ٥٤٠ − ٠,٣ س

ومطلوب : (أ) تحديد الكمية س التى تجعل الربح أعظم ما يمكن.

(ب) ما هو مقدار الربح . (ج) ما هو السعر

(د) بين أن التكلفة الحدية = الإيراد الحدى

<u>الحـــل</u>

(أ) الربح = الإيراد الكلى − التكلفة الكلية

ر = [سعر الوحدة × عدد الوحدات] − التكلفة الكلية

ر = [(٥٤٠ − ٠,٣س) × س] − [٠,٧س^{٢} + ٤٠س + ٤٠٠٠٠]

ر = ٥٤٠ س − ٠,٣ س^{٢} − ٠,٧س^{٢} − ٤٠س − ٤٠٠٠٠

ر = − س^{٢} + ٥٠٠ س − ٤٠٠٠٠

(١) ∴ ر/ = −٢ س + ٥٠٠

(٢) مساواة ر/ بالصفر : −٢ س + ٥٠٠ = صفر

٥٠٠ = ٢ س ← س = $\frac{٥٠٠}{٢}$ = ٢٥٠

(٣) إيجاد التفاضل الثانى (ر") :

ر" = تفاضل (-٢ س + ٥٠٠)

= -٢ ← سالب ← نهاية عظمى للربح

أى عند إنتاج ٢٥٠ وحدة فإن الربح يكون أكبر ما يمكن.

(ب) ولإيجاد الربح ← نعوض عن س = ٢٥٠ فى معادلة الربح (ر) :

ر = -س^{٢} + ٥٠٠ س - ٤٠٠٠٠

= - (٢٥٠)^{٢} + ٥٠٠ (٢٥٠) - ٤٠٠٠٠

= - ٦٢٥٠٠ + ١٢٥٠٠٠ - ٤٠٠٠٠ = ٢٢٥٠٠

(جـ) لايجاد السعر ← نعوض عن س = ٢٥٠ فى معادلة السعر (ع) :

ع = ٥٤٠ - ٠,٣ س = ٥٤٠ - (٠,٣ × ٢٥٠)

= ٥٤٠ - ٧٥ = ٤٦٥

(د) ∵ التكلفة الحدية = تفاضل التكلفة الكلية

∴ التكلفة الحدية = تفاضل (٠,٧س^{٢} + ٤٠س + ٤٠٠٠٠)

= ١,٤ س + ٤٠

= ١,٤ (٢٥٠) + ٤٠ (عند س = ٢٥٠)

= ٣٥٠ + ٤٠ = ٣٩٠

∵ الإيراد الحدى = تفاضل الإيراد الكلى

∴ الإيراج الحدى = تفاضل (٥٤٠ س - ٠,٣ س^{٣})

= ٥٤٠ - ٠,٦س

= ٥٤٠ - ٠,٦ (٢٥٠) (عند س = ٢٥٠)

= ٥٤٠ - ١٥٠ = ٣٩٠

أى أن الإيراد الحدى = التكلفة الحدية [عند س = ٢٥٠]

تمـــــارين

١- أوجد المعامل التفاضلى الأول $\left(\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right)$ لكل من العلاقات التالية:

١- $\text{ص} = ٨\,\text{س}^{٤} - ٣\,\text{س}^{٣} + ٥\,\text{س} - ١٠$

٢- $\text{ص} = \sqrt{٥\text{س}^{٤} - ١٢}$

٣- $\text{ص} = (٢\,\text{س}^{٤} - ٥\,\text{س}^{٢})\,(\text{س}^{٣} - ١٥)$

٤- $\text{ص} = (٣\,\text{س}^{٨} - ١٢\,\text{س}^{٢} - ١٢)^{٤}$

٥- $\text{ص} = \dfrac{\text{س}^{٣} - ٥\text{س}^{٢}}{١٢\text{س} - ٧}$

٦- $\text{ص} = \text{هـ}^{٥\text{س}^{٢} - ١٠\text{س} + ٧}$

٧- $\text{ص} = ٨\,\text{س}^{٣}\,\sqrt{\text{س}^{٢} - ١٥}$

٨- $\text{ص} = \sqrt[٣]{(\text{س}^{٤} + ١٢)^{٢}}$

٩- $\text{ص} = ٣٥٠٠$

١٠- $\text{ص} = \text{لوهـ}\,(٣\text{س}^{٤} - ١٢\text{س}^{٣} - ٥\,\text{س})$

١١- $\text{ص} = \text{س}^{٣}\,(\text{س}^{٥} - ٢\,\text{س}^{٢})$

١٢- $\text{ص} = \text{أ}\,\text{س}^{٢} + \text{ب}\,\text{س} + \text{جـ}$ (حيث أ ، ب ، جـ ثوابت)

١٣- $\text{ص} = ٧\,\text{س}^{٣}\,\text{لوهـ}\,(\text{س}^{٤} - ١٢)$

١٤- $\text{ص} = \text{هـ}^{-٤\text{س}}\,\sqrt{\text{س}^{٢} + ٥\text{س} + ١٢}$

١٥- $\text{ص} = \dfrac{١}{\sqrt{١٠٠ - \text{س}^{٢}}}$

١٦- $\text{ص} = ٤\text{س}^{٣}\,\sqrt[٣]{\text{س}^{٤} - ١٥}$

٢- باستخدام تفاضل الدالة الضمنية أوجد $\frac{dص}{dس}$ لكل من الدوال الأتية:

١- ص – ٥س + ١ = ٠

٢- $س^2 + ٤ص^2 - ٣٦ = ٠$

٣- $ص^2 - س^4 - ٤س^2 = ٤$

٤- $ص^3 - س^3 - ٤ = ٠$

٥- $س^2 + ٢س ص + ص^2 = ١٦$

٣- إذا كانت الكمية المعدة للعرض من أحد المنتجات هى ك بسعر ع على الصورة التالية:

ص = –٢ + ٠,٨ ع

فإوجد مرونة العرض عندما يكون السعر ع = ٥ .

٤- أوجد مرونة الطلب للدالة الآتية:

ك = ٢٠٠ – ٤ ع (ك: الكمية المطلوبة ، ع : السعر)

وذلك عند (أ) ع = ٦ ، (ب) ع = ٢٧

٥- إذا كانت دالة الطلب لمشروع معين على الشكل التالى: ك = ٧٥ – ٥س ،

فالمطلوب إيجاد مرونة الطلب السعرية عندما يكون السعر ع = ٣.

٦- بافتراض أن العلاقة بين السعر (ع) والكمية المطلوب (ك) لسلعة ما كالاتى:

ك = ٣ – ٠,١ ع

فإوجد مرونة الطلب عند السعر ع = ١٠ ، ثم أوجد عند أى سعر وأى كمية تكون مرونة الطلب = –٢ .

٧- إذا كانت العلاقة بين السعر (ع) والكمية المعروضة (ك) كالآتى:

ع = ٢ + ٠,٢ ك

فأوجد مرونة العرض عند السعر ع = ٥ ، ثم أوجد عند أى سعر وأى كمية تكون مرونة العرض = ٣ .

٨- إذا كان السعر (ع) والكمية (ك) لسلعة ما تربطهما العلاقة التالية :

ع = ٥٠ − ٠,١ ك^{٢}

فأوجد المرونة عند ك = ٤٠٠

٩- إذا كانت معادلة الطلب لسلعة ما هى: ط = ١٠٠ − ٠,١ س^{٢} ، ومعادلة العرض هى : ك = −٢٠ + ١,١ س^{٢}

فإوجد مرونة الطلب ومرونة العرض عند توازن السوق.

١٠- شركة تبيع (س) وحدة فى الشهر بسعر (ع) حيث :

ع = ٥٠ − ٠,٠٥ س ، وكانت التكلفة الكلية هى :

ت = ١٠ س + ٥٠٠٠

فكم وحدة (س) تجعل الربح أكبر ما يمكن – وما مقدار هذا الربح – وما هو مقدار سعر البيع . وذلك باستخدام التفاضل.

١١- إذا كانت تكلفة قطع الكيلومتر لشاحنة تسير بسرعة (س) تتحدد بالعلاقة:

$$ت = \frac{س}{٨٠} + \frac{٢٠}{س}$$

فما هى السرعة التى ينبغى أن تسير عليها الشاحنة حتى تكون التكلفة (ت) أقل ما يمكن؟ وما مقدار هذه التكلفة ؟ وذلك باستخدام التفاضل.

١٢- إذا كانت دالة التكلفة الكلية لمشروع ما كالآتى:

$$ت = \frac{١}{٣} س^{٣} - ٨,٥ س^{٢} + ٥٠ س + ٩٠$$

حيث س تمثل حجم الإنتاج ، فالمطلوب:

(أ) مستوى الإنتاج الذى يؤدى إلى تدنيه التكاليف، وما هى أدنى تكاليف ممكنة.

(ب) دالة متوسط التكلفة، وما هى التكلفة المتوسطة عند مستوى الإنتاج الذى يدنى التكاليف.

(ج) دالة التكاليف الحدية، وما هى التكاليف الحدية عند مستوى الإنتاج الذى يدنى التكاليف.

١٣- إذا كانت دالة الإيرادات الكلية لمشروع ما حيث س تمثل حجم الإنتاج كالتالى:

$$د = س^{٣} - ١٢ س^{٢} + ٣٦ س + ٨$$

فأوجد :

(أ) مستوى الانتاج الذى يعظم الإيرادات الكلية.

(ب) ما هو مستوى أعلى إيرادات كلية.

(ج) ما هى دالة الإيرادات الحدية، وما هو مستوى الإيرادات الحدية عند مستوى الإنتاج الذى يعظم الإيرادات الكلية.

١٤- إذا كانت دالة متوسط التكاليف لمشروع ما حيث س تمثل حجم الإنتاج كالآتى:

$م = ٢س^{٢} - ٤ س + ٧$ فأوجد :

(أ) دالة التكاليف الكلية.

(ب) ما هو مستوى الإنتاج الذى يجعل التكاليف الكلية عند أدنى مستوى لها.

(ج) ما هى أدنى تكاليف كلية للمشروع أعلاه.

(د) ما هي دالة التكاليف الحدية للمشروع أعلاه.

١٥- إذا كانت دالتى الإيرادات الكلية (د) والتكاليف الكلية (ت) لمشروع ما حيث س تمثل حجم الانتاج كالآتى:

$$د = ١٠٠ س - س^{٢}$$

$$ت = \frac{١}{٣} س^{٣} - ٧س^{٢} + ١١١ س + ٥٠$$

فأوجد مستوى الإنتاج الذى يعظم الأرباح الكلية، وما هى أعظم أرباح كلية ممكنة.

١٦- بافتراض أن معادلة التكاليف الكلية (ت) لإنتاج الكمية (س) فى مصنع ما هى:

$$ت = ٢٠٠ + ٥س + ٠,٣ س^{٢} + ٠,١ س^{٣}$$

فأوجد كل من التكلفة الحدية والتكلفة المتوسطة عند س = ١٠ ، ٢٠، ٣٠ وحدة. وما هى الكمية (س) التى تكون عندها التكلفة الحدية = ٤١ وحدة نقدية.

١٧- بافتراض أن معادلة التكلفة الكلية (ت) لإنتاج الكمية (س) لمصنع ما هى

ت = ١٠٠س + ٢٠٠٠٠ ، والسعر (ع) يتحدد بالمعادلة:

ع = ٢٠٠ - ٠,١س . فكم وحدة من (س) تنتج ليحقق المصنع أكبر ربح ممكن، وما مقدار هذا الربح، وما مقدار السعر. ثم بين أنه عند هذه القيمة لـ (س) فإن الإيراد الحدى = التكلفة الحدية. وذلك باستخدام أسلوب التفاضل.

الباب الثامن
التكـــامــــل
(Integration)

فى كثير من العمليات الرياضية نلاحظ أن كل عملية لها عملية عكسية تقابلها، فالطرح هو العملية العكسية للجمع والقسمة هى العملية العكسية للضرب واستخراج الجذور هو العملية العكسية للرفع إلى قوى، وعلى نفس النمط نلاحظ أن عملية التكامل هى العملية العكسية للتفاضل.

لاحظنا أن عملية التفاضل تهدف إلى إيجاد معدل التغير فى دالة معينة، وفى كثير من الدراسات الرياضية البحتة والتطبيقية يكون معلوم لدينا معدل التغير فى دالة معينة ونرغب فى معرفة الدالة التى تتغير بهذا المعدل. وبذلك فى عملية التكامل يكون معلوماً لدينا مشتقة الدالة (أى معدل التغير فيها) ونريد إيجاد الدالة نفسها التى لها هذه المشتقة، أى أن تكامل الدالة د (س) بالنسبة إلى س هو الدالة التى يكون تفاضلها الأول بالنسبة إلى س مساوياً د (س). ويرمز إلى تكامل الدالة د(س) بالنسبة إلى س بالرمز $\int$ د (س) ءس

وتقرأ تكامل د (س) بالنسبة إلى س .

أولاً: التكامل غير المحدد (Indefinite Integral)

إذا فرضنا مثلاً أن المشتقة الأولى لدالة د(س) هى:

ل (س) = دَ (س) = ٣ س^{٢} (١)

فما هى الدالة د (س) . من الواضح فى ضوء معرفتنا بقواعد التفاضل أن الدالة د(س) = $س^{٣}$ لها مشتقة أولى هى ل (س) = ٣ $س^{٢}$ وكذلك فإن كلاً من الدوال: $س^{٣}$ + ٧ ، $س^{٣}$ + ١ ، $س^{٣}$ – ٥ ، .... لها نفس المشتقة الأولى المعطاه فى (١). ويمكن ملاحظة أن هناك عدد لا نهائى من الدوال لها نفس المشتقة الأولى ل (س)، وتختلف عن بعضها باختلاف المقدار الثابت الذى يُضاف إلى $س^{٣}$ أو يُطرح منها. وبصفة عامة فإن الصيغة العامة للدالة التى لها المشتقة الأولى ل (س) = ٣$س^{٢}$ هى:

$$د\ (س) = س^{٣} + ث \qquad (٢)$$

حيث ث مقدار ثابت اختيارى Arbitrary Constant ويُكتب ذلك كالآتى:

$$د(س) = \int ل\ (س)\ ءس = \int ٣\ س^{٢}\ ءس = س^{٣} + ث \qquad (٣)$$

واستخدام ءس يعنى أن التكامل بالنسبة للمتغير س ، ويُسمى المقدار الثابت ث ثابت التكامل Constant of integration ويمكن التأكد من صحة إجراء التكامل وذلك عن طريق التحقق من أنه بمفاضلة ناتج التكامل نحصل على الدالة المطلوب إيجاد تكاملها. فمثلاً بمفاضلة الدالة $س^{٣}$ + ث الموجودة فى الطرف الأيسر للمعادلة (٣) بالنسبة إلى س نجد أن:

$$\frac{ء(س^{٣} + ث)}{ءس} = ٣س^{٢}$$

ولما كانت ٣ $س^{٢}$ هى الدالة المطلوب إيجاد تكاملها (الموجودة تحت علامة التكامل) فإن هذا يؤكد صحة نتيجة التكامل التى حصلنا عليها.

ويمكن تحديد قيمة ثابت التكامل بمعلومية قيمة الدالة الأصلية د(س) عند نقطة معينة. فمثلاً إذا كانت المشتقة الأولى لدالة د(س) هى ٣ $س^٢$ وكانت قيمة الدالة عند النقطة س = صفر تساوى ٥ (أى كانت د(٠) = ٥) فإننا نجد من المعادلة (٣) أن:

د(٠) = $(٠)^٣$ + ث = ٥

أى أن ث = ٥ وبذلك تكون :

د (س) = $س^٣$ + ٥

ونلاحظ أن التكامل الذى حصلنا عليه فى (٣) أو (٤) ليس له قيمة عددية محددة وأنه دالة فى المتغير س ، ولذلك يسمى التكامل غير المحدد (أو غير المعين) Indefinite Integral وذلك للتمييز بينه وبين التكامل المحدد Definite Integral الذى سنتعرض له فى الجزء التالى من هذا الباب.

وبصفة عامة إذا كانت ل (س) دالة معلومة وكانت:

$$ل\ (س) = \frac{ء\ د(س)}{ءس}$$

فإن : $\int$ ل (س) ءس = د (س) + ث

بعض قواعد التكامل:

١ - تكامل المقدار الثابت:

كما علمنا أن تفاضل المقدار الثابت يساوى صفر ولكن إذا أردنا إيجاد تكامل المقدار الثابت (أ) يكون كالتالى:

$\int$ أ ءس = أ س + ث

مثال (١) :

أوجد ناتج مايلى:

(١) $\int$ ٥ ءس .　　　(٣) $\int \frac{١}{٢}$ ءس .

(٢) $\int$ – ٣ ءس.　　　(٤) $\int$ ٠,٢ ءس.

الحـــل

(١) $\int$ ٥ ءس = ٥ س + ث

(٢) $\int$ –٣ ءس = –٣ س + ث

(٣) $\int \frac{١}{٢}$ ءس = $\frac{١}{٢}$ س + ث

(٤) $\int$ ٠,٢ ءس = ٠,٢س + ث

٢ – تكامل دالة مرفوعة إلى أس حقيقى :

إذا كانت س دالة مرفوعة إلى أى أس حقيقى وليكن ن حيـث ن عـدد حقيقى فإن قيمة تكاملها يساوى س مرفوعة إلى نفس الأس مضافاً إليـه واحـد صحيح مقسومة على الأس الجديد كالتالى:

$$\int س^{ن} ءس = \frac{س^{ن+١}}{ن+١} + ث$$

مثال (٢) :

أوجد التكاملات الآتية:

(١) $\int$ س^{٣} ءس.
(٢) $\int$ س$^{-٤}$ ءس.
(٣) $\int \frac{١}{س^{٦}}$ ءس.
(٤) $\int$ س ءس.

الحل

(١) $\int$ س^{٣} ءس $= \frac{س^{٤}}{٤} +$ ث

(٢) $\int$ س$^{-٤}$ ءس $= \frac{س^{-٣}}{-٣} +$ ث

(٣) $\int \frac{١}{س^{٦}}$ ءس $= \int$ س$^{-٦}$ ءس $\frac{س^{-٥}}{-٥} +$ ث

(٤) $\int$ س ءس $= \frac{س^{٢}}{٢} +$ ث

(٣) تكامل ثابت مضروب فى دالة:

$$\int أ\ س^{ن}\ ءس = \frac{أ\ س^{ن+١}}{ن+١} + ث$$

مثال (٣) :

أوجد التكاملات الآتية:

(١) $\int ٤$ س^{٢} ءس
(٢) $\int ٢$س^{٥} ءس
(٣) $\int -٣$ س$^{-٢}$ ءس
(٤) $\int \frac{٣}{س^{٤}}$ ءس.

الحـــل

(١) $\int \text{٤س}^{٢}\ \text{ءس} = \frac{\text{٤س}^{٢+١}}{٢+١} + \text{ث} = \frac{\text{٤س}^{٣}}{٣} + \text{ث}$

(٢) $\int \text{٢س}^{٥}\ \text{ءس} = \frac{\text{٢س}^{٥+١}}{٥+١} + \text{ث} = \frac{\text{٢س}^{٦}}{٦} + \text{ث}$

(٣) $\int -\text{٣س}^{-٢}\ \text{ءس} = \frac{-\text{٣س}^{-٢+١}}{-٢+١} + \text{ث} = \frac{-\text{٣س}^{-١}}{-١} + \text{ث}$

$= \text{٣ س}^{-١} + \text{ث}$

(٤) $\int \frac{٣}{\text{س}^{٤}}\ \text{ءس} = \int \text{٣س}^{-٤}\ \text{ءس} = \frac{\text{٣س}^{-٤+١}}{-٤+١} + \text{ث}$

$= \frac{\text{٣س}^{-٣}}{-٣} + \text{ث} = -\text{س}^{-٣} + \text{ث}$

٤- تكامل قوس مرفوع إلى أس حقيقى:

إذا كان لدينا دالة عبارة عن قوس مرفوع إلى أس حقيقى ويُراد تكامل هـــذا القوس، فإن التكامل يساوى نفس القوس مرفوع إلى نفس الأس مضافاً إليه واحد صحيح ومقسوماً على حاصل ضرب الأس الجديد فـــى تفاضـــل مـــا بداخل القوس أى أن:

$$\int [\text{د(س)}]^{\text{ن}}\ \text{ءس} = \frac{[\text{د(س)}]^{\text{ن}+١}}{(\text{ن}+١).\text{د}'\text{(س)}} + \text{ث}$$

حيث د′(س) ترمز إلى تفاضل ما بداخل القوس.

مثال (٤) :

أوجد تكامل الدوال التالية :

(١) $\int (٢\text{س}+١)^{٣}\ \text{ءس}$. (٣) $\int \frac{١}{(\text{س}^{٢}+٥\text{س})^{٣}}\ \text{ءس}$

(٢) $\int (٣\text{س}^{٢}+٢\text{س}+٥)^{٢}\ \text{ءس}$ (٤) $\int \frac{٥}{(\text{س}^{٢}+٥\text{س}^{٢})^{٤}}\ \text{ءس}$

الحـــل

(١) $\int (٢\text{س}+١)^{٣}\ \text{ءس} = \frac{(٢\text{س}+١)^{٣+١}}{(٣+١)(٢)} + \text{ث}$

$= \frac{(٢\text{س}+١)^{٤}}{٨} + \text{ث}$

(٢) $\int (٣\text{س}^{٢}+٢\text{س}+٥)^{٢}\ \text{ءس} = \frac{(٣\text{س}^{٢}+٢\text{س}+٥)^{٢+١}}{(٢+١)(٦\text{س}+٢)} + \text{ث}$

$= \frac{(٣\text{س}^{٢}+٢\text{س}+٥)^{٣}}{٣(٦\text{س}+٢)} + \text{ث}$

(٣) $\int \frac{١}{(\text{س}^{٢}+٥\text{س})^{٣}}\ \text{ءس} = \int (\text{س}^{٢}+٥\text{س})^{-٣}\ \text{ءس}$

$= \frac{(\text{س}^{٢}+٥\text{س})^{-٣+١}}{(-٣+١)(٢\text{س}+٥)} + \text{ث}$

$= \frac{(\text{س}^{٢}+٥\text{س})^{-٢}}{-٢(٢\text{س}+٥)} + \text{ث}$

(٤) $\int \frac{٥}{(س^{٣} - ٥س^{٢})^{٤}}$ ءس $= \int ٥ (س^{٣} - ٥ س^{٢})^{-٤}$ ءس

$$= \frac{٥(س^{٣} - ٥س^{٢})^{-٤+١}}{(-٤+١)(٣س^{٢} - ١٠س)} + ث$$

$$= \frac{٥(س^{٣} - ٥س^{٢})^{-٣}}{-٣(٣س^{٢} - ١٠س)} + ث$$

(٥) تكامل دالة مضروبة فى تفاضلها:

$$\int [د(س)]^{ن} \times دَ (س)\ ءس = \frac{[د(س)]^{ن+١}}{(ن+١)} + ث$$

مثال (٥) :

أوجد ناتج التكاملات التالية:

(١) $(٤س^{٣} + ٥س^{٢} + ٧)^{٤} (١٢س^{٢} + ١٠س)$ ءس

(٢) $\int \sqrt{س^{٤} + ٥س}\ (٤س^{٣} + ٥)$ ءس

(٣) $\int \frac{٤س + ١٠}{\sqrt{٢س^{٢} + ١٠س}}$ ءس

الحـــل

(١) $\int (٤ س^{٣} + ٥ س^{٢} + ٧)^{٤} (١٢ س + ١٠س)$ ءس

وحيث أن القوس الثانى هو ناتج تفاضل ما فى القوس الأول فيكون:

ناتج التكامل $= \frac{(٤س^{٣} + ٥س^{٢} + ٧)^{٤+١}}{٤+١} + ث$

$$= \frac{(٤س^{٣} + ٥س^{٢} + ٧)^{٥}}{٥} + ث$$

(٢) $\int \sqrt{س^4 + ٥س}\ (٤س^3 + ٥)\ ءس$

$= \int (س^4 + ٥\ س)^{\frac{1}{2}}\ (٤س^3 + ٥)\ ءس$

وحيث أن القوس الثانى هو ناتج تفاضل ما فى القوس الأول فإن:

ناتج التكامل $= \dfrac{(س^4 + ٥س)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} +$ ث

$= \dfrac{(س^4 + ٥س)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} +$ ث

(٣) $\int \dfrac{(٤س + ١٠)}{\sqrt{٢س^2 + ١٠س}}\ ءس = \dfrac{(٤س + ١٠)}{(٢س^2 + ١٠س)^{\frac{1}{2}}}\ ءس$

$= \int (٢س^2 + ١٠س)^{-\frac{1}{2}}\ (٤س + ١٠)\ ءس$

وحيث أن القوس الثانى هو ناتج تفاضل ما فى القوس الثانى يكون:

ناتج التكامل $= \dfrac{(٢س^2 + ١٠س)^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} +$ ث

$= \dfrac{(٢س^2 + ١٠س)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} +$ ث $= ٢(٢س^2 + ١٠)^{\frac{1}{2}} +$ ث

٦- تكامل الدالة الأسية:

تكامل الدالة الأسية يساوى نفس الدالة مقسوماً على تفاضل الأس كالتالى: $\int هـ^{د(س)}\ .\ ءس = \dfrac{هـ^{د(س)}}{د'(س)} +$ ث

حيث $د'(س)$ هى تفاضل الدالة د (س) .

مثال (٦) :

أوجد :

(١) $\int \text{هـ}^{\text{س}^{٢}+٥} \;.\; \text{ءس}$ (٣) $\int \text{هـ}^{\text{س}} \;.\; \text{ءس}$

(٢) $\int \text{هـ}^{-٣\text{س}} \;.\; \text{ءس}$ (٤) $\int \text{هـ}^{-٢\text{س}^{٣}+٥\text{س}} \;.\; \text{ءس}$

الحــــل

(١) $\int \text{هـ}^{\text{س}^{٢}+٥} \;.\; \text{ءس} = \dfrac{\text{هـ}^{\text{س}^{٢}+٥}}{٢\text{س}} + \text{ث}$

(٢) $\int \text{هـ}^{-٣\text{س}} \;.\; \text{ءس} = \dfrac{\text{هـ}^{-٣\text{س}}}{-٣} + \text{ث}$

(٣) $\int \text{هـ}^{\text{س}} \;.\; \text{ءس} = \dfrac{\text{هـ}^{\text{س}}}{١} + \text{ث} = \text{هـ}^{\text{س}} + \text{ث}$

(٤) $\int \text{هـ}^{-٢\text{س}^{٣}+٥\text{س}} \;.\; \text{ءس} = \dfrac{\text{هـ}^{-٢\text{س}^{٣}+٥\text{س}}}{-٦\text{س}^{٢}+٥} + \text{ث}$

٧- تكامل دالة أسية مضروبة فى تفاضل الأس:

إذا كانت الدالة الآسية مضروبة فى تفاضل الأس فـإن قيمـة التكامـل تساوى نفس الدالة أى أن:

$$\int \text{هـ}^{\text{د(س)}} \times \text{د}'\text{(س)} \;.\; \text{ءس} = \text{هـ}^{\text{د(س)}} + \text{ث}$$

مثال (٧) :

أوجد:

(١) $\int \text{هـ}^{\text{س}^{٣}} \times ٣\text{س}^{٢} \;.\; \text{ءس}.$

(٢) $\int \text{هـ}^{٤\text{س}^{٣}+٥\text{س}+٤} \times (١٢\text{س}^{٢} + ٥) \;.\; \text{ءس}$

(٣) $\int \text{هـ}^{٤\text{س}^{٥}١٠\text{س}+٢} \times (١٠\text{س}^{٤} - ٥) \;.\; \text{ءس}$

الحــــل

(١) $\int \text{هـ}^{\text{س}^{٣}} \times ٣\text{س}^{٢} \ . \ \text{ءس}$

وحيث أن ٣ $\text{س}^{٢}$ هو نفس تفاضل الدالة $\text{س}^{٣}$.

∴ ناتج التكامل = $\text{هـ}^{\text{س}^{٣}} + \text{ث}$

(٢) $\int \text{هـ}^{٤\text{س}^{٣}+٥\text{س}+٤} \times (١٢\text{س}^{٢} + ٥) \ . \ \text{ءس}$

وحيث أن (١٢ $\text{س}^{٢}$ +٥) هو ناتج تفاضل المقدار ($٤\text{س}^{٣}$ + ٥س+٤).

∴ ناتج التكامل = $\text{هـ}^{٤\text{س}^{٣}+٥\text{س}+٤} + \text{ث}$

(٣) $\int \text{هـ}^{٤\text{س}^{٥}-١٠\text{س}+٢} \times (١٠\text{س}^{٤} - ٥) \ . \ \text{ءس}$

نلاحظ أن المقدار ($١٠\text{س}^{٤}$ – ٥) ليس هو نـــاتج تفاضــــل الأس ($٤\text{س}^{٥}$ –١٠س +٢)، لذلك يلزم ضرب الدالة كلها فى ٢ وبالتالى القسمة أيضاً على ٢ حتى لا تتغير قيمـــة الدالة كالتالى:

$$= \frac{١}{٢}\int \text{هـ}^{٤\text{س}^{٥}-١٠\text{س}+٢} \times ٢(١٠\text{س}^{٤} - ٥) \ . \ \text{ءس}$$

$$= \frac{١}{٢}\int \text{هـ}^{٤\text{س}^{٥}-١٠\text{س}+٢} \times (٢٠\text{س}^{٤} - ١٠) \ . \ \text{ءس}$$

∴ ناتج التكامل = $\frac{١}{٢} \times \text{هـ}^{٤\text{س}^{٥}-١٠\text{س}+٢} + \text{ث}$

٨- تكامل دالة على صورة البسط تفاضل المقام:

إذا كان البسط عبارة عن تفاضل المقام فإن التكامل يكون عبارة عن لوغاريتم المقام، أى أن :

$$\int \frac{د'(س)}{د(س)} ءس = لوهـ \ د(س) + ث$$

مثال (٨) :

أوجد التكاملات التالية:

(١) $\int \frac{٣س^{٢} + ٦س}{س^{٣} + ٣س^{٢} + ٦} \ ءس$ (٢) $\int \frac{س^{٢} + ١}{س^{٣} + ٣س} \ ءس$

(٣) $\int س^{-١} \ ءس$

الحـــل

(١) $\int \frac{٣س^{٢} + ٦س}{س^{٣} + ٣س^{٢} + ٦} \ ءس$

حيث أن البسط ($٣س^{٢}$ + ٦س) هو تفاضل المقام ($س^{٣}$ + $٣س^{٢}$ + ٦).

∴ ناتج التكامل = لوهـ ($س^{٣}$ + $٣س^{٢}$ + ٦) + ث

(٢) $\int \frac{س^{٢} + ١}{س^{٣} + ٣س} \ ءس$

نلاحظ أن البسط ($س^{٢}$ + ١) ليس هو تفاضـــل المقـــام ($س^{٣}$ + ٣س) ، لذلك يلزم ضرب البسط × ٣ ليصبح تفاضل المقام وبالتالى القسمة على ٣ حتى لا تتغير قيمة الدالة كالتالى:

$$\therefore \int \frac{س^{2}+1}{س^{3}+3س} ءس = \frac{1}{3}\int \frac{3(س^{2}+1)}{س^{3}+3س} ءس$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{3س^{2}+3}{س^{3}+3س} ءس = \frac{1}{3} لو_{ه}(س^{3}+3س) + ث$$

$$(3) \int س^{-1} ءس = \int \frac{1}{س} ءس = لو_{ه}س + ث$$

حيث أن تفاضل المقام = البسط

مثال (٩) :

أوجد كلاً من:

$$(1) \int \sqrt{س^{5}} \,.\, ءس \qquad (2) \int \frac{1}{س^{3}} \,.\, ءس$$

$$(3) \int \left(ه^{س} + \frac{10س+1}{5س^{2}+س} + س^{-1}\right) ءس$$

الحــل

$$(1) \int \sqrt{س^{5}} \,.\, ءس = \int س^{\frac{5}{2}} \,.\, ءس = \frac{س^{\frac{5}{2}+1}}{\frac{5}{2}+1} + ث$$

$$= \frac{س^{\frac{7}{2}}}{\frac{7}{2}} + ث = \frac{2}{7}س^{\frac{7}{2}} + ث$$

$$(2) \int \frac{1}{س^{3}} \,.\, ءس = \int س^{-3} \,.\, ءس = \frac{س^{-3+1}}{-3+1} + ث$$

$$= \frac{س^{-2}}{-2} + ث$$

(٣) $\int \left(\text{هـ}^{\text{س}} + \frac{\text{١٠س} + ١}{\text{٥س}^{٢} + \text{س}} + \text{س}^{-١} \right) \text{ءس}$

ناتج التكامل = $\text{هـ}^{\text{س}} + \text{لوهـ} \left(\text{٥س}^{٢} + \text{س} \right) + \text{لوهـ س} + \text{ث}$

مثال (١٠) :

أوجد ناتج التكاملات التالية:

(١) $\int \text{س} \sqrt{\text{س}^{٣}} \ \text{ءس}$

(٢) $\int \frac{-٩}{\sqrt{\text{س}}} \ \text{ءس}$

(٣) $\int \text{١٠س}^{٢} - ٤ \sqrt{\text{س}} + \text{٢س}^{٥} \ \text{ءس}$

(٤) $\int \left(\text{٥س}^{٢} + \text{٢س} \right)^{١٠} \left(\text{١٠س} + ٢ \right) \ \text{ءس}$.

(٥) $\int \sqrt{\left(\text{س}^{٢} + \text{س} \right)^{٥}} \ \left(\text{٢س} + ١ \right) \ \text{ءس}$

(٦) $\int - \frac{١}{(١ + \text{س})} \ \text{ءس}$

(٧) $\int \frac{\frac{١}{٤} \left(\text{٦س}^{٢} + \text{١٠س} \right)}{\sqrt[٤]{\left(\text{٢س}^{٣} + \text{٥س}^{٢} \right)^{٣}} \ \sqrt[٤]{\left(\text{٢س}^{٣} + \text{٥س}^{٢} \right)}} \ \text{ءس}$.

(٨) $\int \text{٢س} \ \text{هـ}^{\text{س}^{٢}} \ \text{ءس}$

الحل

(١) $\int س \sqrt{س^{٣}}\ ءس = \int س \times س^{\frac{٣}{٢}}\ ءس$

$= \int س^{\frac{٥}{٢}}\ ءس = \dfrac{س^{\frac{٧}{٢}}}{\frac{٧}{٢}} + ث = \dfrac{٢}{٧} س^{\frac{٧}{٢}} + ث$

(٢) $\int \dfrac{-٩}{\sqrt{س}}\ ءس = \int -٩س^{-\frac{١}{٢}}\ ءس =$

$= -٩ \dfrac{س^{-\frac{١}{٢}+١}}{-\frac{١}{٢}+١} + ث = -٩\dfrac{س^{\frac{١}{٢}}}{\frac{١}{٢}} + ث = -١٨س^{\frac{١}{٢}} + ث$

(٣) $\int ١٠س^{٢} - ٤\sqrt{س} + ٢س^{٥}\ ءس$

$= \dfrac{١٠}{٣}س^{٣} - ٤\dfrac{س^{\frac{٣}{٢}}}{\frac{٣}{٢}} + ٢\dfrac{س^{٦}}{٦} + ث$

$= \dfrac{١٠}{٣}س^{٣} - \dfrac{٨}{٣}س^{\frac{٣}{٢}} + \dfrac{١}{٣}س^{٦} + ث$

(٤) $\int (٥س^{٢} + ٢س)^{١٠}(١٠س + ٢)\ ءس = \dfrac{(٥س^{٢} + ٢س)^{١١}}{١١} + ث$

(٥) $\int \sqrt[٣]{(س^{٢} + س)^{٥}}\ (٢س + ١)\ ءس$

$= \int (س^{٢} + س)^{\frac{٥}{٣}}(٢س + ١)\ ءس$

$= \dfrac{(س^{٢} + س)^{\frac{٥}{٣}+١}}{\frac{٥}{٣}+١} + ث = \dfrac{(س^{٢} + س)^{\frac{٨}{٣}}}{\frac{٨}{٣}} + ث$

$= \dfrac{٣}{٨}(س^{٢} + س)^{\frac{٨}{٣}} + ث$

(٦) $\int \dfrac{١}{(١ + س)} .\ ءس = لوهـ (١ + س) + ث$

$$(\text{٧}) \quad \int \frac{\frac{1}{\text{٤}}\left(\text{٦س}^{2} + \text{١٠س}\right)}{\sqrt[\text{٤}]{\left(\text{٢س}^{3} + \text{٥س}^{2}\right)^{3}} \; \sqrt[\text{٤}]{\left(\text{٢س}^{3} + \text{٥س}^{2}\right)}} \, \text{ءس}$$

$$= \int \frac{\frac{1}{\text{٤}}\left(\text{٦س}^{2} + \text{١٠س}\right)}{\left(\text{٢س}^{3} + \text{٥س}^{2}\right)^{\frac{3}{4}} \left(\text{٢س}^{3} + \text{٥س}^{2}\right)^{\frac{1}{4}}} \, \text{ءس}$$

$$= \frac{1}{\text{٤}} \int \frac{\left(\text{٦س}^{2} + \text{١٠س}\right)}{\text{٢س}^{3} + \text{٥س}^{2}} \, \text{ءس} = \frac{1}{\text{٤}} \, \text{لوـ} \left(\text{٢س}^{3} + \text{٥ س}^{2} \right) + \text{ث}$$

$$(\text{٨}) \quad \int \text{٢س هـ}^{\text{س}^{2}} \, \text{ءس} = \text{هـ}^{\text{س}^{2}} + \text{ث}$$

ملاحظات :

(١) دالة التكلفة الكلية = تكامل دالة التكلفة الحدية .

(٢) دالة الإيراد الكلى = تكامل دالة الإيراد الحدى .

مثال (١١) :

إذا كان منحنى التكلفة الحدية لأحد المنتجات تمثله الدالة: ٢س^{٢} + ٤س – ٢ ، وكانت إجمالى التكاليف عند حجم الإنتاج (س = صفر) يعادل ١٠٠٠ جنيـــه . فأوجد :

أ- دالة منحنى التكلفة الكلية.

ب- دالة منحنى التكلفة المتوسطة.

الحـــل

أ- التكلفة الكلية = $\int$ التكلفة الحدية.

= $\int$ ٢س^{٢} + ٤ س – ٢ . ءس

= $\frac{٢}{٣}$ س^{٣} + $\frac{٤}{٢}$ س^{٢} – ٢س + ث

= $\frac{٢}{٣}$ س^{٣} + ٢ س^{٢} – ٢ س + ث

وحيث أن اجمالى التكاليف عند (س = ٠) = ١٠٠٠ ، فإن ث = ١٠٠٠.

∴ التكلفة الكلية = $\frac{٢}{٣}$ س^{٣} + ٢ س^{٢} – ٢ س + ١٠٠٠

ب- التكلفة المتوسطة = $\frac{\text{التكلفة الكلية}}{\text{عدد الوحدات}}$

التكلفة المتوسطة = $\frac{\frac{٢}{٣}س^٣ + ٢س^٢ - ٢س + ١٠٠٠}{س}$

$= \frac{\frac{٢}{٣}س^٣}{س} + \frac{٢س^٢}{س} - \frac{٢س}{س} + \frac{١٠٠٠}{س}$

$= \frac{٢}{٣}س^٢ + ٢س - ٢ + \frac{١٠٠٠}{س}$

مثال (١٢) :

إذا كانت التكلفة الحدية ($ت_ح$) = $\frac{٢٠٠٠}{\sqrt{س-٢}}$ حيـــث س > ٢ . فأوجـــد التكلفة الثابتة للمصنع إذا كانت التكلفة الكلية لإنتاج ٢٧ وحـــدة هـــى ٣٠,٠٠٠ جنيه.

الحـــــل

∵ التكلفة الكلية (ت) = تكامل التكلفة الحدية

$ت = \int \frac{٢٠٠٠}{\sqrt{س-٢}} ءس$

$ت = ٢٠٠٠ \int (س-٢)^{-\frac{١}{٢}} ءس.$

$ت = ٢٠٠٠ \frac{(س-٢)^{\frac{١}{٢}}}{\frac{١}{٢}\times ١} + ث$

$ت = ٤٠٠٠ \sqrt{(س-٢)} + ث$

" وعند س = ٢٧ فإن ت = ٣٠,٠٠٠ "

$٣٠,٠٠٠ = ٤٠٠٠ \sqrt{٢٧-٢} + ث$

$$٣٠,٠٠٠ = ٢٠,٠٠٠ + ث$$

$$\therefore ث = ١٠,٠٠٠$$

∴ التكاليف الثابتة = ١٠,٠٠٠ جنيه

مثال (١٣) :

إذا كان الإيراد الحدى لمنتجات إحـدى الـشركات تمثلــه المعادلــة: ٣٠٠–٢س (حيث س تمثل حجم المبيعات)، فأوجد حجم الإيراد الكلى للمنشأة إذا كان حجم مبيعاتها ١٠٠ وحدة.

الحــــل

∵ الإيراد الكلى = تكامل الإيراد الحدى

$$= \int ٣٠٠ - ٢س \, ءس$$

$$= ٣٠٠س - س^{٢} \qquad [ث = صفر]$$

وإذا كان حجم المبيعات (س = ١٠٠) يصبح الإيراد الكلى:

الإيراد الكلى = ٣٠٠ (١٠٠) – $(١٠٠)^{٢}$ = ٢٠٠٠٠ جنيه.

مثال (١٤) :

بإفتراض التكلفة الحدية ($ت_ح$) = $٣س^{٢} - ٢٠ س + ٢٠٠$ ،

والإيراد الحدى ($ر_ح$) = ٢٠٠ – ٢ س

حيث س : حجم الإنتاج **فأوجد :**

(١) معادلة الربح الصافى بالتكامل (مع اعتبار التكلفة الثابتة ٥٠).

(٢) حجم الإنتاج الذى يجعل الربح أكبر ما يمكن بالتفاضل.

الحـــل

(١) الربح الصافى = الإيراد الكلى − التكلفة الكلية

الإيراد الكلى = $\int$ الإيراد الحدى

$= \int ٢٠٠ - ٢س \;.\; ءس$

$= ٢٠٠\,س - س^{٢}$ (ث = صفر)

التكلفة الكلية = $\int$ التكلفة الحدية

$= \int ٣س^{٢} - ٢٠س + ٢٠٠ \;.\; ءس$

$= \frac{٣س^{٣}}{٣} - \frac{٢٠س^{٢}}{٢} + ٢٠٠س + ث$

وحيث أن التكلفة الثابتة (ث) = ٥٠

التكلفة الكلية = $س^{٣} - ١٠س^{٢} + ٢٠٠\,س + ٥٠$

∴ الربح الصافى = $[٢٠٠س - س^{٢}] - [س^{٣} - ١٠س^{٢} + ٢٠٠س + ٥٠]$

ر $= ٢٠٠س - س^{٢} - س^{٣} + ١٠س^{٢} - ٢٠٠س - ٥٠$

$ر = -س^{3} + 9س^{2} - 50$

(٢) حجم الإنتاج (س) الذى يجعل الربح أكبر ما يمكن بالتفاضل:

(*) إيجاد المشتقة الأولى لمعادلة الربح ومساواتها بالصفر لاستنتاج قيمة س.

$ر' = -3س^{2} + 18س$

$\therefore -3س^{2} + 18س = صفر$

$-3س(س - 6) = صفر$

$س - 6 = صفر$

$س = 6$

(**) إيجاد المشتقة الثانية:

$ر'' = -6س + 18$

$ر'' = (-6 \times 6) + 18$ (بالتعويض عن س = ٦)

$= -36 + 18$

$= -18$ " مقدار سالب "

∴ توجد نهاية عظمى للربح عند إنتاج س = ٦

ثانياً: التكامل المحدد Definite Integral

فى الجزء السابق تناولنا دراسة التكاملات غير المحددة ولاحظنا أن كلاً منها عبارة عن دالة فى متغير (س مثلاً) ومن ثم فليس لها قيمة عددية محـــددة. وكذلك رأينا أن :

$$\int د'(س)\ ءس = د(س) + ث$$

حيث د′(س) تساوى المشتقة الأولى للدالة د(س)، فإذا كانـــت د′(س) دالة متصلة على الفترة المغلقة [أ ، ب] حيث أ < ب ، وأوجدنا باقى طرح قيمة الطرف الأيسر للمعادلة السابقة عندما تكون س = أ ، من قيمة نفـــس الطـــرف الأيسر عندما تكون س = ب فإن باقى الطرح يسمى التكامـــل المحـــدد للدالـــة د′(س) من أ إلى ب . وتسمى أ النهاية السفلى للتكامل (الحد الأدنى للتكامـــل) Lower limit of integration وتسمى ب النهاية العليا للتكامل (الحد الأعلى للتكامل) Upper limit of integration ويُعبر عن ذلك بكتابة:

$$\int_{أ}^{ب} د'(س)\ ءس = [\,د(س) + ث\,]\Big|_{أ}^{ب}$$

$$= [د(ب) + ث\,] - [د(أ) + ث] = د(ب) - د(أ)\ .$$

والعلامة $\Big|_{أ}^{ب}$ تُعنى أن تعوض عن س بالقيمة ب فى ناتج التكامـــل ثـــم نعوض عن س بالقيمة أ فى نفس ناتج التكامل، وبعد ذلك نطرح ناتج التعويض الثانى من ناتج التعويض الأول فيكون باقى الطرح هو قيمة التكامـــل المحـــدد المطلوب.

وواضح من التعرض السابق أنه لحساب التكامل المحدد لدالة $د'$(س) من أ إلى ب فإنه من الممكن إهمال ثابت التكامل (ث) لأنه ليس له تأثير فى حساب التكامل المحدد ، وبصفة عامة فإن :

$$\int_{أ}^{ب} د'(س)\,ءس = د(س)\Big|_{أ}^{ب} = د(ب) - د(أ)$$

مثال (١٥) :

إحسب قيمة : $\int_{١}^{٣} ١٠س^{٤}\,ءس$

الحـــل

$$\int_{١}^{٣} ١٠س^{٤}\,ءس = \frac{١٠س^{٥}}{٥}\Big|_{١}^{٣} = ٢س^{٥}\Big|_{١}^{٣} = ٢\left[(٣)^{٥} - (١)^{٥}\right] = ٤٨٤$$

مثال (١٦) :

أحسب قيمة : $\int_{\text{٠}}^{\text{٤}} \left(\frac{\text{١}}{\text{س} + \text{٣}} + \text{٦س}\right) \text{ءس}$

الحــــل

$$\int_{\text{٠}}^{\text{٤}} \left(\frac{\text{١}}{\text{س} + \text{٣}} + \text{٦س}\right) \text{ءس} = \int_{\text{٠}}^{\text{٤}} \frac{\text{١}}{\text{س} + \text{٣}} \text{ءس} + \int_{\text{٠}}^{\text{٤}} \text{٦س ءس}$$

$$= \text{لوهـ (س + ٣)} \Big|_{\text{٠}}^{\text{٤}} + \text{٣س}^{\text{٢}} \Big|_{\text{٠}}^{\text{٤}} = [\text{لوهـ ٧} - \text{لوهـ ٣}] + [\text{٣} (\text{٤}^{\text{٢}} - \text{٠}^{\text{٢}})]$$

$$= \text{لوهـ٧} - \text{لوهـ٣} + \text{٤٨} = \text{١,٩٤٥٩١} - \text{١,٠٩٨٦١٢} + \text{٤٨}$$

$$= \text{٤٨,٨٤٧٢٩٨}$$

مثال (١٧) :

أوجد كل من التكاملات التالية:

(١) $\int_{\text{٠}}^{\text{٢}} (\text{س} + \text{٥}) \text{ ءس}$

(٢) $\int_{\text{٠}}^{\text{٢}} (\text{س}^{\text{٢}} + \text{٤}) \text{ ءس}$

(٣) $\int_{\text{٤}}^{\text{٦}} \frac{\text{٢س}}{\text{س}^{\text{٢}} - \text{١}} \text{ ءس}$

(٤) $\int_{\text{١}}^{\text{٢}} (\text{٣س}^{\text{٢}} + \text{٢س} + \text{٥}) \text{ ءس}$

الحــــل

(١) $\int_{\text{٠}}^{\text{٢}} (\text{س} + \text{٥}) \text{ ءس} = \frac{\text{س}^{\text{٢}}}{\text{٢}} + \text{٥ س} \Big|_{\text{٠}}^{\text{٢}}$

$$= \left[\frac{(\text{٢})^{\text{٢}}}{\text{٢}} + \text{٥}(\text{٢})\right] - \left[\frac{(\text{٠})^{\text{٢}}}{\text{٢}} + \text{٥}(\text{٠})\right] = \text{١٢} - \text{٠} = \text{١٢}$$

(٢) $\int_{٠}^{٢} (\text{س}^{٢} + ٤)\,\text{ءس} = \frac{\text{س}^{٣}}{٣} + ٤\text{س} \Big|_{٠}^{٢}$

$= \left[\frac{(٢)^{٣}}{٣} + ٤(٢)\right] - \left[\frac{(٠)^{٣}}{٣} + ٤(٠)\right] = ٢,٦٦ - ٨ = -٥,٣٤$

(٣) $\int_{٤}^{٦} \frac{٢\text{س}}{\text{س}^{٢} - ١}\,\text{ءس} = \text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}^{٢} - ١) \Big|_{٤}^{٦} =$

$= \text{لو}_{\text{هـ}}(٦^{٢} - ١) - \text{لو}_{\text{هـ}}(٤^{٢} - ١)$

$= \text{لو}_{\text{هـ}}\, ٣٥ - \text{لو}_{\text{هـ}}\, ١٥ = ٣,٥٦ - ٢,٧١ = ٠,٨٥$

(٤) $\int_{١}^{٢} (٣\text{س}^{٢} + ٢\text{س} + ٥)\,\text{ءس} = \frac{٣\text{س}^{٣}}{٣} + \frac{٢\text{س}^{٢}}{٢} + ٥\text{س} \Big|_{١}^{٢}$

$= \text{س}^{٣} + \text{س}^{٢} + ٥\text{س} \Big|_{١}^{٢} =$

$[(٢)^{٣} + (٢)^{٢} + ٥(٢)] - [(١)^{٣} + (١)^{٢} + ٥(١)]$

$= ٢٢ - ٧ = ١٥$

تمـــارين

(١) استخدم خواص التكامل لحساب التكامل المعطى :

١- $\int (٤\text{س}^{٣} + ٦\text{س}^{٢} + ٤\text{س} + ١٠)\, \text{ءس}$.

٢- $\int \left(\text{س}^{٤} + \frac{٥٠}{\text{س}} + ٧\text{هـ}^{\text{س}} + \frac{٦}{\text{س}^{٢}}\right) \text{ءس}$.

٣- $\int \left(\text{س}^{\frac{١}{٤}} + \text{س}^{٢} + ٥\,\text{س}\right) \text{ءس}$.

٤- $\int \left(\text{ت}^{٥} + \text{ت}^{\frac{٢}{٣}} + \frac{٣}{\text{ت}^{٥}} + \frac{٣٠}{\text{ت}}\right) \text{ءت}$.

٥- $\int \left(٣\,\text{س}^{٢} - ٥\,\text{س}^{\frac{٣}{٤}} + \sqrt{\text{س}}\right) \text{ءس}$

٦- $\int \left(٣\text{أ}^{٢} + ٢\,\text{أ} - ١\right) \text{ء أ}$

٧- $\int \left(\text{ت}^{٢} + \text{هـ}^{\text{ت}} - \frac{١}{\text{ت}}\right) \text{ء ت}$.

٨- $\int \left(٢\,\text{س}^{\frac{٢}{٣}} - ٣\,\text{هـ}^{\text{س}} + \frac{٢}{\text{س}}\right) \text{ءس}$.

٩- $\int \left(٣\text{س}^{٢} - ٢\,\text{س}^{\frac{٢}{٣}} + \frac{٤}{\text{س}^{٣}}\right) \text{ءس}$

١٠- $\int \left(\frac{٢\text{س}}{\text{س}^{٢} + ٥}\right) \text{ءس}$

١١- $\int (٢\text{س} - ١٥)^{٨}\, \text{ءس}$

١٢- $\int \sqrt[3]{(4\text{س}-1)^{2}}\ \text{ءس}$ ١٣- $\int 4\,\text{هـ}^{-3\text{س}+6}\ \text{ءس}$

١٤- $\int \left(\sqrt{\text{س}}+\frac{1}{\sqrt{\text{س}}}\right)\text{ءس}$ ١٥- $\int \frac{2\text{س}^{\frac{2}{3}}-\text{س}+\text{س}^{\frac{7}{5}}}{\text{س}^{3}}\ \text{ءس}$

١٦- $\int \left(\text{س}+\frac{1}{\text{س}}\right)^{2}\text{ءس}$ ١٧- $\int (\text{أ}\,\text{س}+\text{ب})\ \text{ءس}$. (أ، ب ثابتان)

(٢) أحسب التكاملات المحددة التالية :

١- $\int_{2}^{2} 3\ \text{ءس}$ ٢- $\int_{-1}^{4} -\text{س}\ \text{ءس}$

٣- $\int_{-1}^{1} 2\ \text{ءس}$ ٤- $\int_{-2}^{2} (2\text{س}+1)\ \text{ءس}$

٥- $\int_{2}^{3} (\text{س}+\text{س}^{2})\ \text{ءس}$ ٦- $\int_{0}^{2} (\text{س}^{2}+2)^{2}\ \text{ءس}$

٧- $\int_{1}^{3} \frac{1}{\text{س}}\ \text{ءس}$ ٨- $\int_{2}^{5} \text{ءس}$

٩- $\int_{-1}^{2} \text{هـ}^{\text{س}}\ \text{ءس}$ ١٠- $\int_{0}^{2} \text{هـ}^{\text{ت}}\ \text{دت}$

١١- $\int_{9}^{16} 5\sqrt{\text{س}}\ \text{ءس}$ ١٢- $\int_{-1}^{2} (4\text{س}^{3}-2\text{س}^{2}+2)\ \text{ءس}$

١٣- $\int_{٠}^{١} \left(٢\sqrt{\text{م}} + \text{م}^{٢} - ٢\right) \text{ءم}$ ١٤- $\int_{٠}^{٤} \left(٢\text{هـ}^{\text{ت}} - ٤\,\text{ت}^{٣}\right) \text{ءت}$

١٥- $\int_{٠}^{١} \left(٢\text{و}^{-\frac{١}{٢}} + ٢\text{و}^{٣}\right) \text{ءو}$ ١٦- $\int_{١}^{٢} \left(٣\text{س} - \frac{٢}{٣\text{س}^{٢}} + \frac{٤}{\text{س}}\right) \text{ءس}$

١٧- $\int_{٢}^{٢} \left(٣\text{س}^{٤} - \frac{٣}{٤\text{س}^{٢}} - ٢\right) \text{ءس}$ ١٨- $\int_{-١}^{١} \left(\text{س}^{\frac{١}{٥}} - \text{س}^{\frac{١}{٢}}\right) \text{ءس}$

١٩- $\int_{٠}^{٨} \sqrt[٣]{\text{س}}\ \text{ءس}$ ٢٠- $\int_{١}^{٤} \left(\sqrt{\text{س}} + \frac{١}{\text{س} + ٢}\right) \text{ءس}$

(٣) أوجد قيمة د (س) من المعلومات المعطاة للدوال التالية:

(١) د/ (س) = س + ٢ ، د (٣) = ٥

(٢) د/ (س) = س − ٥ ، د (٢) = ٤

(٣) د/ (س) = $\text{س}^{٢}$ + ٣ ، د (−١) = ٢

(٤) د/ (س) = $\text{س}^{٢}$ − ٥ ، د (٠) = ٣

(٥) د/ (س) = ٢ + ٣ $\text{هـ}^{\text{س}}$ ، د (٠) = ٥

(٦) د/ (س) = $\frac{٢}{\text{س}}$ ، د (١) = −٣

(٤) وجدت شركة أن التكلفة الحدية هى : $ت_ح(س) = س^٢ - ٣ س$. فأوجد دالة التكلفة الكلية ت (س) مع العلم بأن التكلفة الثابتة (تكلفة إنتاج صفر من الوحدات) هى ١٠٠٠ جنيه.

(٥) إذا علمت أن الإيراد الحدى لإحدى الشركات هو: $ر_ح = ١٠٠ - ٠,١ س$ فأوجد دالة الإيراد الكلى عندما س = ١٠ وحدات.

(٦) إذا كانت دالتى الإيراد الحدى ($ر_ح$) والتكلفة الحدية ($ت_ح$) لأحد الشركات هى: $ر_ح = ٥٠٠ - ٠,١ س$، $ت_ح = ٠,٢ س^٢ + ٠,٥ س$ حيث س تمثل حجم الإنتاج، فأوجد معادلة الربح باستخدام أسلوب التكامل، وذلك بافتراض أن التكلفة الثابتة = ١٠ وحدات نقدية .

(٧) إذا كان منحنى التكلفة الحدية لشركة ما كالآتى:

$١٠٠٠ (س-١)^{-\frac{١}{٢}}$ (حيث س > ١) فأوجد معادلة التكلفة الكلية إذا كانت التكلفة الكلية عند إنتاج ٢٦ وحدة هى ١٣٠٠٠ وحدة نقدية.

(٨) بافتراض أن معادلة التكلفة الحدية للإنتاج فى أحد المصانع هى:

$ت' = ٠,٥ س^٢ - ٠,١ س + ٧$ حيث (س) تمثل حجم الإنتاج و (ت) هى التكلفة الكلية. فأوجد كل من: معادلتى التكلفة الكلية والتكلفة المتوسطة، وما هى التكلفة الكلية والمتوسطة عند س = ١٠ .

(٩) بافتراض أن دالتى الإيراد الحدى ($ر_ح$) والتكلفة الحدية ($ت_ح$) على الترتيب لأحد المصانع هى: $ر_ح = ٢٠٠ - ٢س$ ، $ت_ح = ٣س^٢ - ٢٠س + ٢٠٠$ س تمثل حجم الإنتاج ، فأوجد :

(أ) معادلة الربح الصافى باستخدام أسلوب التكامل (إذا كانت التكلفة الثابتة= ٥٠ وحدة نقدية).

(ب) حجم الإنتاج الذى يجعل الربح الصافى أعظم ما يمكن باستخدام أسلوب التفاضل.

(١٠) **بافتراض أن الإيراد الحدى لأحد الشركات هو** ٥٠ وأن معادلـــة التكلفـــة الحدية هى: ١٠+٤ س (حيث س هى حجم الإنتاج). فأوجـــد باســـتخدام أسلوب التكامل كل من معادلة الإيراد الكلى ومعادلة التكلفة الكلية ومن ثم معادلة الربح الصافى.

ثم باستخدام أسلوب التفاضل أوجد (س) التى تجعل الربح الصافى أعظم ما يمكن (بافتراض أن التكلفة الثابتة = ١٠ وحدات نقدية).